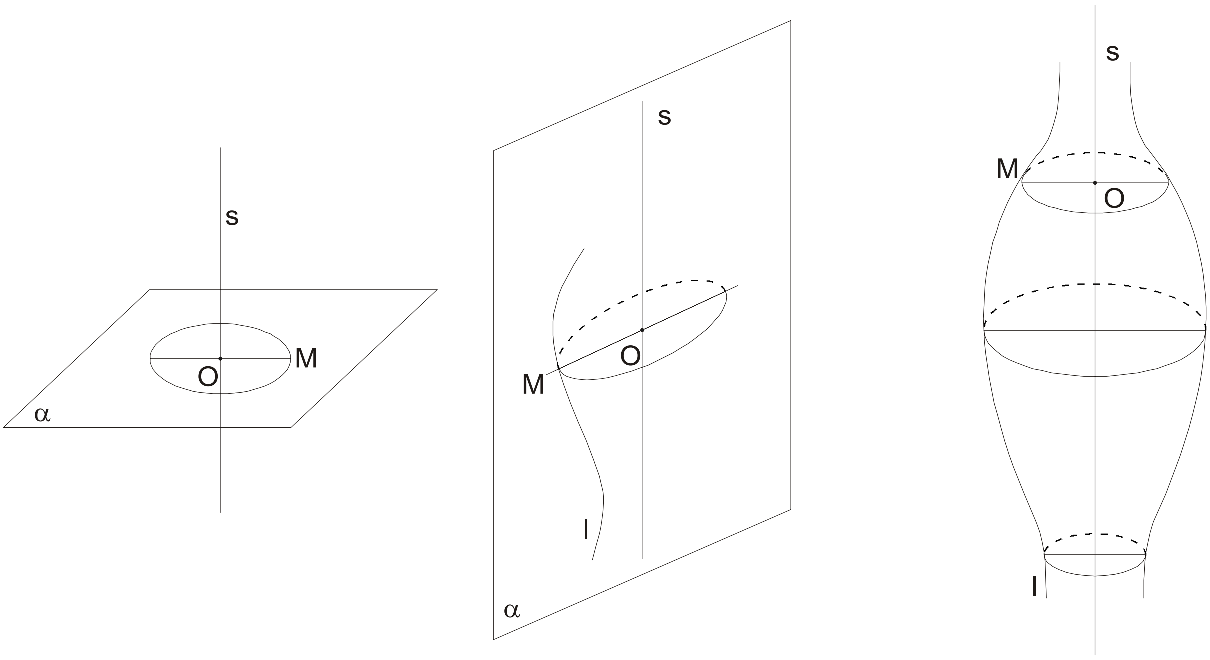
САДРЖАЈ

ЛОПТА И ДИЈЕЛОВИ ЛОПТЕ

ОБРТНЕ ПОВРШИ

Нека је дата права s и тачка M која јој не припада. Нека је α раван која садржи тачку M и нормална је на s. У равни α посматрајмо кружну линију k са центром $O=s\cap\alpha$ и полупречником OM (сл.1а). Кружна линија k је добијена ротацијом тачке M око осе s за пун угао.

Нека је s произвољна права и α раван која је садржи (сл.1б) и нека је ℓ произвољна линија равни α. Ако раван α ротира око праве s за пун угао, тада свака тачка $M\in\ell$ описује кружну линију која припада равни нормалној на праву s, а чији је центар у тачки $O\in s$. Унија таквих кружних линија, добијених обртањем свих тачака линије ℓ, образује *обртну* (ротациону) *површ* (сл.1в).

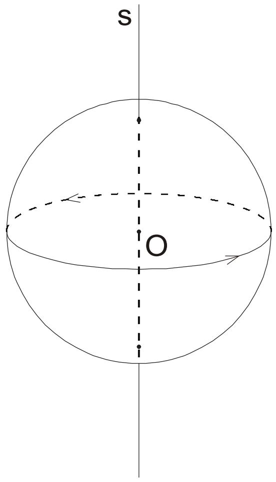


а) б) в)

Слика 1

Обртна површ је добијена обртањем линије ℓ око осе s. Ако је линија ℓ права која са правом s нема заједничких тачака (тј. паралелна јој је), добијена обртна површ је права кружна цилиндрична површ, која се назива и *обртна цилиндрична површ.* Ако је линија ℓ права која сијече праву s, добијена обртна површ је права кружна конусна површ која се назива и *обтна конусна површ*.

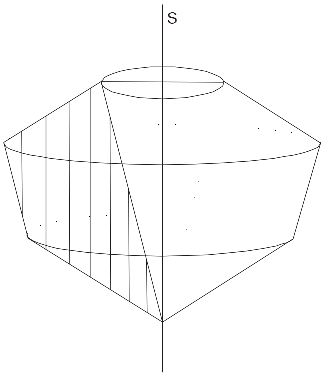
Обртањем кружне линије ℓ око осе која садржи њен пречник добија се обртна површ која се назива *сфера* (сл.2).



Слика 2

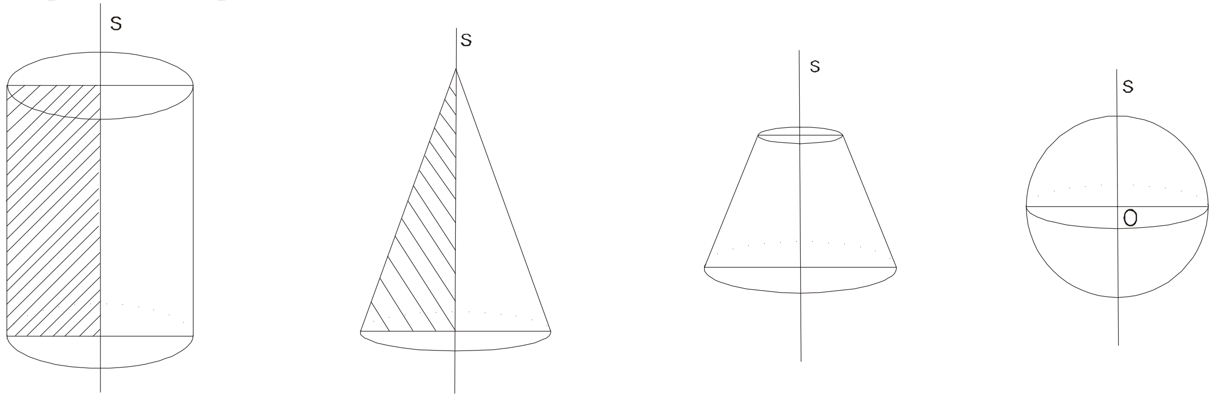
ОБРТНА ТИЈЕЛА

Обртањем површи произвољне равне фигуре Φ око осе s настаје *обртно* геометријско *тијело*(сл.3).



Слика 3

Ротацијом правоугаоника око осе која садржи једну од његових страница настаје *прав ваљак* (сл.3а). Ротацијом правоуглог троугла око осе која садржи једну његову катету добија се *права купа*(сл.3б). У случају ротације једнакокраког трапеза око његове осе симетрије, или правоуглог трапеза око осе која садржи његову краћу бочну страну, настаје *зарубљена купа*(сл.3в). *Лопта* настаје ротирањем круга око осе која садржи његов пречник(сл.3г).



а) б) в) г)

Слика 4

СФЕРА , ЛОПТА И ЊИХОВИ ДИЈЕЛОВИ

Euclides дефинише у XI књизи својих “Елемената” сферу обртањем круга око једног његовог пречнка. У старој грчкој геометрији наилазимо на дефиницију каква се обично усваја и данас и по којој је лопта укупност тачака у простору, једнако удаљених од једне тачке.

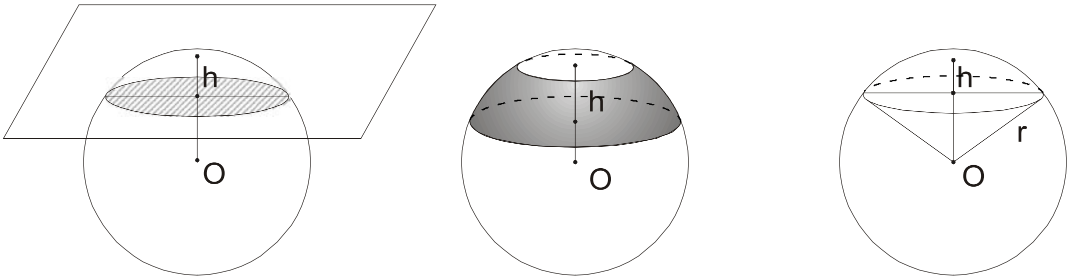
Као што су све тачке кружне линије једнако удаљене од њеног средишта, тако су и све тачке сфере једнако удаљене од те тачке. Утврђена тачка је *центар* сфере.

Растојање било које тачке сфере од њеног центра назива се *полупречник* сфере. Дуж која спаја двије тачке сфере је њена *тетива.* Тетива која пролази кроз центар сфере назива се *пречник* (дијаметар) сфере и двоструко је дужа од полупречника.

За тачке чије је растојање од центра мање од полупречника сфере кажемо да су *у* лопти, а оне чија су растојања већа од полупречника сфере су *ван* сфере.

Центар, полупречник, пречник и тетива сфере су центар, полупречник, пречник и тетива лопте коју та сфера ограничава.

Раван која садржи једну унутрашњу тачку сфере сијече ту сферу по кружној линији и дијели је на двије *калоте*, а одговарајућу лопту на два *лоптина одсјечка* којима је пресјечни круг заједничка основа (сл.4а). Растојање од равни основе до најудаљеније тачке калоте представља *висину* калоте.



а) б) в)

Слика 4

Пресијецањем сфере равни која садржи њен центар, добијају се двије *полусфере*, а пресјек је *велика кружна линија* чији је полупречник једнак полупречнику сфере. Ако се лопта пресјече истом равни пресјек је *велики круг* ограничен великом кружном линијом.

Тијело ограничено омотачем праве купе и дијелом сферне површи (калотом) (центар сфере је у врху купе), назива се *лоптин исјечак* (сектор) (сл.4в). Свака пресјечна раван дијели лопту на два *лоптина одсјечка*. Дио лопте између двије паралелне равни се зове *лоптин слој* (сл.4б). Гранични углови су основе слоја, а њихово растојање висина (дебљина) слоја.

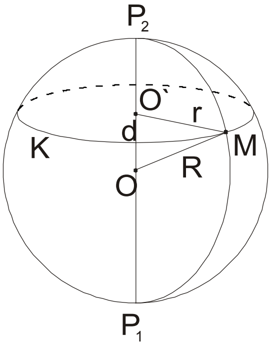
ПОЛОЖАЈ ТАЧКЕ, ПРАВЕ И РАВНИ ПРЕМА СФЕРИ И СФЕРЕ ПРЕМА СФЕРИ

Тачка може према сфери бити:
1.) на њој, ако има централно растојање $d=r$ (једнако полупречнику сфере),
2.) у њој, ако је $d<r$
3.) ван ње, ако је $d>r$

Права која има растојање h од центра сфере полупречника r, може:
1. продирати сферу у двије тачке, кад је $h<r$;
2. имати са сфером једну заједничку тачку – додиривати је, кад је $h=r$
3. бити сасвим изван сфере – нема са њом заједничких тачака, $h>r$

Раван сијече сферу полупречника R, ако је њено централно растојање $d<R$. При том важи теорема: ПРЕСЈЕК СФЕРЕ И РАВНИ ЈЕ КРУГ.

Тада је (сл.5) $r=R-d$ (d је растојање пресјечне равни од центра сфере, R полупречник сфере, r растојање тачке M на пресјечној линији k равни и сфере од положаја O, нормале из центра сфере O и пресјечне равни). Како су d и R стални за све тачке пресјечне линије то мора бити и r стално, па је стога пресјечна линија круг са центром у тачки O'.



Слика 5

Одавде непосредно проистиче да је највећи круг, по ком раван сијече дату сферу, велики круг сфере.

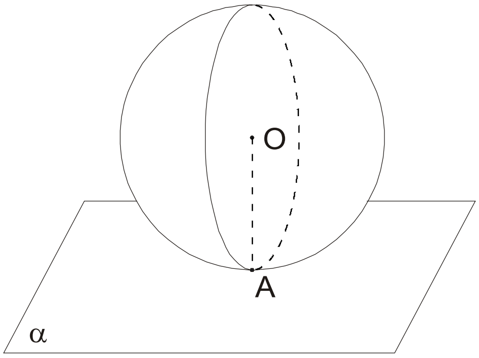
КРОЗ ДВИЈЕ ТАЧКЕ СФЕРЕ КОЈЕ НИСУ КРАЈЕВИ ИСТОГ ПРЕЧНИКА МОЖЕ СЕ ПОСТАВИТИ САМО ЈЕДАН ВЕЛИКИ КРУГ.

Три тачке (двије на сфери и трећа центар сфере) одређују у таквом случају само једну пресјечну раван.

ПРЕСЈЕК РАВНИ ДВА ВЕЛИКА КРУГА СФЕРЕ УВИЈЕК ЈЕ ПРЕЧНИК СФЕРЕ.

Центар сфере мора припадати објема равнима, па према томе, и пресјечној дужи кругова.

Раван α чије је централно растојање d једнако полупречнику R сфере ($d=R=OA$) има само једну тачку A заједничку са сфером и зове се додирна (тангентна) раван (сл.6).



Слика 6

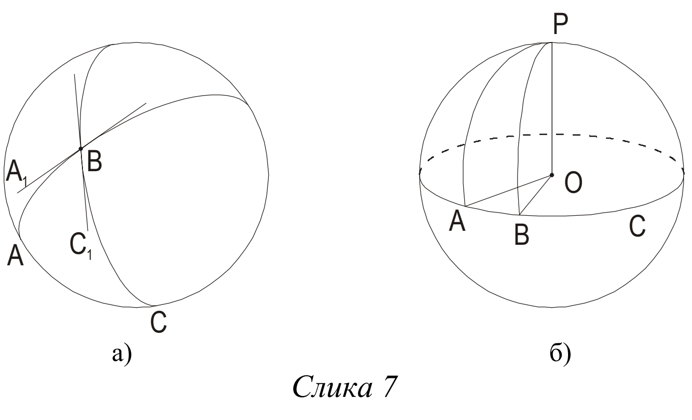
Раван и сфера могу бити и без заједничких тачака ($d>R$).

Двије сфере могу бити једна изван друге, једна у другој, могу се сјећи (пресјек им је круг), додиривати споља или изнутра и могу као специјални положај једне сфере у другој имати заједнички центар – бити концентричне.

Двије сфере су увијек у хомотетичном положају једна према другој и имају два центра хомотетије. Из тог протстиче да су све сфере сличне.

ОСОБИНЕ СФЕРНИХ ФИГУРА

Сваки геометријски облик на сфери је *сферна фигура*. Сферни угао образују два лука великих кругова који пролазе из исте тачке (сл.7а) и за њих се употребљавају називи *тјеме* и *краци* угла. Величину сферног угла ABC мјеримо углом $A_1B_1C_1$ који образују тангенте кружних лукова у тјемену B. Како је $A_1B_1C_1$ уствари угао нормалног пресјека диедра који образују полуравни обређене датим кружним луковима, то се под сферним углом подразумијева и овај диедар. За два лука великих кругова сфере каже се да су нормална један другом, ако образују прав сферни угао.



а) б)

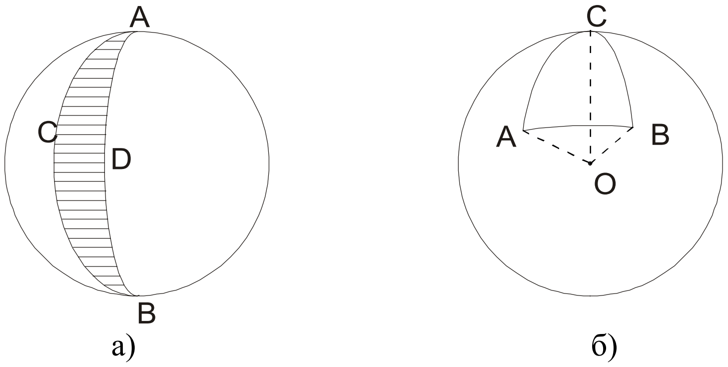
Слика 7

ВЕЛИЧИНА СФЕРНОГ УГЛА ОДРЕЂЕНА *е* ЛУКОМ ЕКВАТОРСКОГ УГЛА ЧИЈИ ЈЕ ПОЛ У ТЈЕМЕНУ СФЕРНОГ УГЛА.

У сферном углу *АРВ* (сл.7б) нека је тјеме *Р* пол великог угла е који је са своје стране екватор за пол *Р*. Величина сферног угла *АРВ* одређена је углом *АОВ* нормалног пресјека чије је тјеме у тачки *О*, центру сфере. Међутим, величина овог посљедњег угла је (као централног угла *е*) одређена луком *АВ* између кракова.

Сферни двоугао АСВDА је сферна фигура коју образују два полукруга АСВ и АDВ великих кругова са заједничким крајњим тачкама. Сферни углови А и В с углови двоугла(сл.8а).

Ако је тјеме рогља у центру неке сфере, онда његове ивице продиру у сферу. Нпр. тространи рогаљ коме тјеме *О* продире у сферу центра *О* у тачкама *А*, *В* и *С* (сл.8б). Стане рогља *АОВ*, *ВОС* и *СОА* сијеку сферу по луковима *АВ*, *ВС* и *СА* великих кругова. Тако образована сферна фигура *АВС* зове се *сферни троугао*. Уопште, ма за који број страна рогља настаје на овај начин *сферни полигон* (многоугао). Тјемена сферног троугла су *А*, *В* и *С*; лукови великих кругова *АВ*, *ВС* и *СА* су му странице, а сферни углови код *А*, *В* и *С* углови.



а) б)

Слика 8

Сферни полигон са више од 3 странице може бити *конвексан* или *конкаван*, према томе какав је односни рогаљ.

Основне везе између сферног полигона и односног рогља коме је тјеме у центру сфере јесу:

1. Свака страна сферног полигона има исто онолико лучних степена колико односни ивични угао рогља има угловних степена
2. Сваки угао сферног полигона једнак је односном диедру рогља

Пошто је збир ивичних углова конвексног рогља мањи од 360° може се рећи:

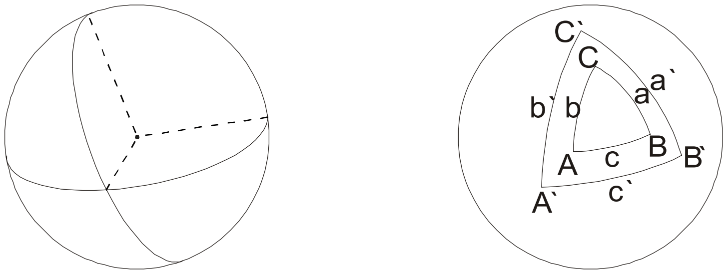
ЗБИР СВИХ СТРАНИЦА СФЕРНОГ ПОЛИГОНА МАЊИ ЈЕ ОД 360°.

Странице сферних полигона су кружни лукови који имају своју дужину, али их овде изражавамо у степенима, јер се на сфери одређеног полупречника могу израчунати дужине кружних лукова великих кругова, када је познат односни централни угао у стпенима или кад је познат број лучних степена уоченог лука, што је исто:

У СВАКОМ СФЕРНОМ ТРОУГЛУ ЗБИР УГЛОВА МОРА БИТИ ВЕЋИ ОД 180°, А МАЊИ ОД 540° ТЈ.

$$180° < \angle A + \angle B + \angle C < 540°$$

Ово непосредно проистиче из односне теореме о триедрима. Према томе, збир углова сферног троугла је увијек је већи од 180° (колико износи збир углова у равном троуглу). Разлика $\angle A + \angle B + \angle C - 180° = \varepsilon$ зове се *сферни ексцес*. Усљед тог, сферни троугао може бити *правоугли*, кад има један угао прав; али и *двоправоугли* и *троправоугли*, кад има два или сва три угла права , што је сад сасвим могуће. Странице троправоуглог сферног троугла су *квадранти* (сл.9а), при чему се под тим подразумијева четвртина великог круга уочене сфере. Према дужинама страница сферни троугао може бити: *једнакостраничан, једнакокрак* и *разностраничан*.



а) б)

Слика 9

Ако се датом сферном троуглу *ABC* (сл.9б) на истој конструише други сферни троугао *A`B`C`* чије су странице лукови великих кругова, за које су тачке *A*, *B*, *C* полови, тај сферни троугао се зове *поларни троугао* првом троуглу. Тјемена поларног троугла добијамо као продорне тачке ивица поларног триедра датог сферног троугла, ако га конструишемо у тјемену овог триедра, тј. у центру сфере.

Ово показује да су поларни сферни троуглови у вези са поларним рогљевима, па како су ови узајамно поларни, биће то увијек и сферни поларни троугли, тј. ако је *A`B`C`* сферни поларни троугао за сферни троугао *ABC*, и овај је са своје стране сферни поларни троугао за троугао *A`B`C`*. Исто тако тачна је и *T*:

АКО СУ ДВА СФЕРНА УГЛА УЗАЈАМНО ПОЛАРНА, ОНДА ЈЕ СВАКИ УГАО ЈЕДНОГ СУПЛЕМЕНТАН ОДНОСНОЈ СТРАНИЦИ ДРУГОГ, тј.

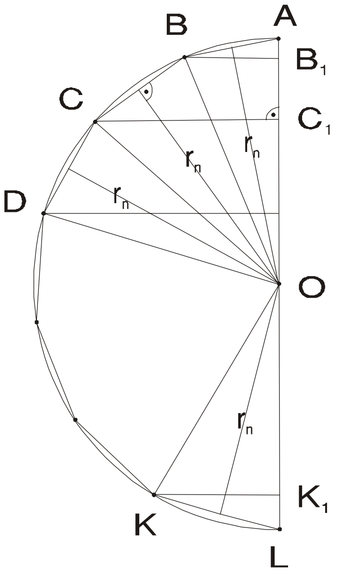
$$A+a`=B+b`=C+c`=A`+a=B`+b=C`+c=180°$$

малим словима означене странице, великим углови, а цртама елементи поларног троугла.

ПОВРШИНА СФЕРЕ

За површину сфере добијену обртањем полукруга око једног пречника узима се граница којој теже површине настале обртањем око истог пречника правилне изломљене линије уписане у датом полукругу кад број страница те линије неограничено расте .

Нека је у полукруг уписана правилна изломљена линија ABC…KL, са n страна (сл.10). Обртна површ настала ротацијом те изломљене линије састоји се од површине омотача двије купе, n-3 зарубљених купа и ваљка (ако је број n непаран).



Слика 10

$B_1, C_1, D_1, \ldots, K_1$ – подножја нормала спуштених редом из тјемена B,C,D…K на AL

r_n – дужина нормала спуштених из O на AB, BC, …, KL

На основу претходне теореме, добија се:

$$s_{AB} = 2\pi r_n \cdot \overline{AB_1}$$
$$s_{BC} = 2\pi r_n \cdot \overline{B_1C_1}$$
$$\overline{}$$
$$s_{KL} = 2\pi r_n \cdot \overline{K_1L}$$

сабирањем једначина добија се величина обртне површи (S_n) настале ротацијом изломљене линије ABC…KL

$$S_{AB} + S_{BC} + \ldots + S_{KL} = 2\pi r_n \left(\overline{AB_1} + \overline{B_1C_1} + \ldots + \overline{K_1L}\right)$$

$$S_{AB} + S_{BC} + \ldots + S_{KL} = S_n \wedge \overline{AB_1} + \overline{B_1C_1} + \ldots + \overline{K_1L} = \overline{AL} = 2r$$

$$S_n = 4\pi r_n \cdot r$$

Када n бесконачно расте, тада $r_n \to r$, а $S_n \to S$. Дакле :

$$S = 4r^2\pi$$

Површина сфере једнака је четворостркој површини њеног великог круга.

Пошто су све лопте сличне, њихове површине се односе као квадрати њихових полупречника :

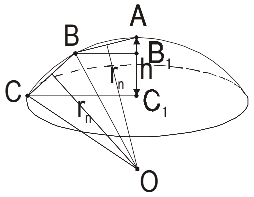
$$\frac{P_{L_1}}{P_{L_2}} = \frac{r_1^2}{r_2^2}$$

ПОВРШИНА ДИЈЕЛОВА СФЕРЕ

ПОВРШИНА КАЛОТЕ

Површина калоте се одређује обртањем правилне изломљене линије, уписане у круг, око пречника тог круга.

Нека се нпр. обрће дио изломљене линије ABC. На тај начин настају бочне површи M_1 и M_2 купе и зарубљене купе (сл.11).



Слика 11

$$M_1 = \overline{AB_1} \cdot 2\pi r_n$$

$$M_2 = \overline{B_1C_1} \cdot 2\pi r_n$$

$$M = 2\pi r_n \left(\overline{AB_1} + \overline{B_1C_1} \right) = 2\pi r_n h$$

h– висина калоте

r_n – дужина нормала спуштених из O на AB и BC

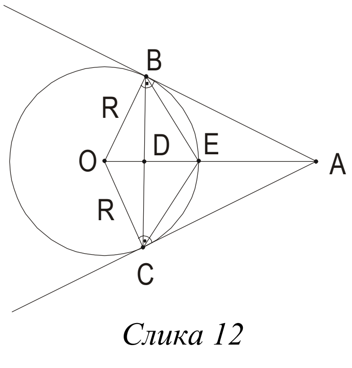
Ако број страна правилне изломљене линије, уписане у луку AC, неограничено расте, онда из посљедње једнакости непосредно слиједи:

$$P = 2r\pi h$$

Површина сферне калоте једнака је производу обима $2r\pi$, великог круга сфере и висине h калоте.

Примјер 1

Израчунати дио површине лопте који се види из тачке A, ако је полупречник лопте R=4cm и одстојање тачке A од центра лопте d=8cm.(сл.12)



Слика 12

Дио површине лопте који се види из тачке A је калота одговарајуће сфере.

Израз за површину калоте ($P = 2r\pi h$) у овм случају гласи:

$$P = 2OB\pi DE$$

Посматрајмо $\Delta ABO \cong \Delta ACO$.

Површина је $P = \frac{AB \cdot OB}{2} = \frac{AO \cdot BD}{2}$, а из ове релације слиједи да је $BD = 2\sqrt{3}$.

Висина калоте *DE* једнака је *DE=OE-OD,* а $OD = \sqrt{OB^2 - BD^2} = 2$, па је *h=DE*=2

Ако добијене вриједности уврстимо у релацију за површину калоте добијамо:

$$P = 2 \cdot 4 \cdot \pi \cdot 2,$$

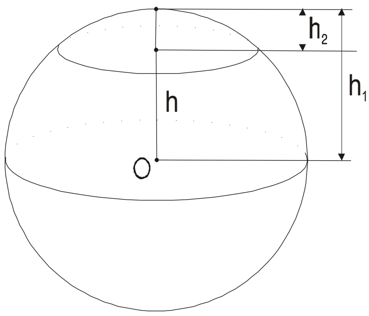
тако да површина дијела сфере који се види из тачке A износи

$$P = 16\pi \text{ cm}^2$$

ПОВРШИНА СФЕРНОГ ПОЈАСА

Површина сферног појаса се одређујена исти начин као и површина сфере и калоте.

Површина појаса се може одредити и краће, на основу познате формуле за површину калоте, ако се узме у обзир да је површина појаса једнака разлици површина двају калота (P_{k_1}, P_{k_2}) чије су висине h_1 и h_2 .(сл.13)



Слика 13

$$\begin{aligned} P &= P_{k_1} - P_{k_2} \\ P &= 2r\pi h_1 - 2r\pi h_2 \\ P &= 2r\pi(h_1 - h_2) \\ P &= 2r\pi h \end{aligned}$$

$$h_1 - h_2 = h$$

ИЗВОЂЕЊЕ ОБРАСЦА ЗА ПОВРШИНУ СФЕРЕ И ЊЕНИХ ДИЈЕЛОВА ПОМОЋУ ОДРЕЂЕНОГ ИНТЕГРАЛА

Површина површи која настаје ротацијом око осе Ox лука криве y=f(x), између тачака чије су апсцисе x=a и x=b (a<b) израчунава се обрасцем:

$$P_x = 2\pi \int_a^b y\sqrt{1 + (y`)^2}\,dx$$

$$x^2 + y^2 = R^2$$

$$2x + 2yy` = 0$$

$$y` = -\frac{x}{y}$$

Према томе:

$$P = 2\pi \int_{-R}^{R} y\sqrt{1 + (y`)^2}\,dx = 4\pi \int_0^R y\sqrt{1 + (y`)^2}\,dx$$

$$P = 4\pi \int_0^R \sqrt{R^2 - x^2} \cdot \sqrt{1 + \frac{x^2}{R^2 - x^2}}\,dx = 4\pi \int_0^R \sqrt{R^2 - x^2} \cdot \frac{R}{\sqrt{R^2 - x^2}}\,dx = 4\pi Rx\Big|_0^R$$

$$P = 4R^2\pi$$

P_k - површина калоте
h - висина калоте

$$P_k = 2\pi \int_{R-h}^{R} y\sqrt{1+(y`)^2}\,dx = 2\pi \int_{R-h}^{R} R\,dx = 2\pi Rx\Big|_{R-h}^{R}$$

$$P_k = 2R^2\pi - 2R^2\pi + 2R\pi h = 2R\pi$$

P_s – површина сферног појаса
h – висина појаса

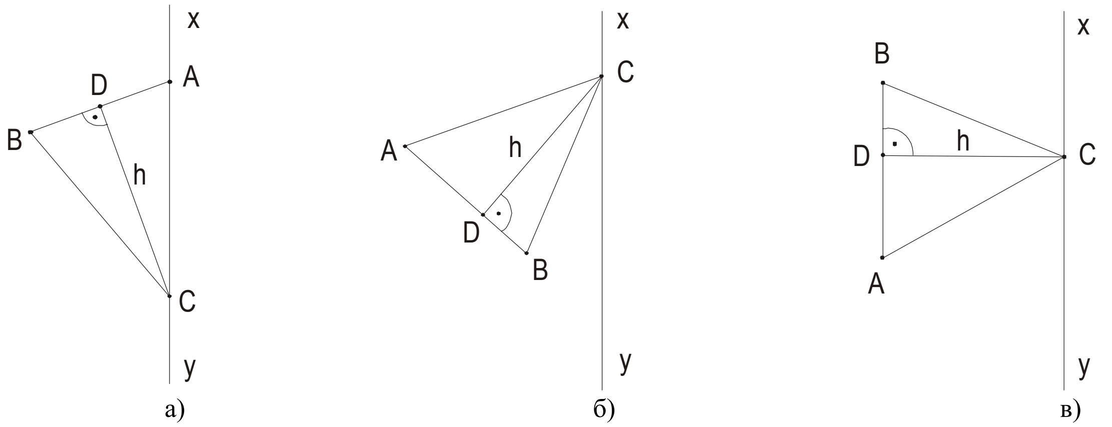
$$P_s = 2\pi \int_{R-h_2}^{R-h_1} y\sqrt{1+(y`)^2}\,dx = 2\pi \int_{R-h_2}^{R-h_1} R\,dx = 2\pi Rx\Big|_{R-h_2}^{R-h_1}$$

$$P_s = 2R\pi h$$

ЗАПРЕМИНА ЛОПТЕ

При израчунавању запремине лопте неопходно је споменути теорему:

Запремина тијела насталог ротацијом троугла око осе која пролази кроз једно његово тјеме и лежи у равни троугла, а не сијече га, једнака је производу површине образоване ротацијом основе троугла и једне трећине одговарајуће висине.



а) б) в)

Слика 14

Запремина насталог тијела :

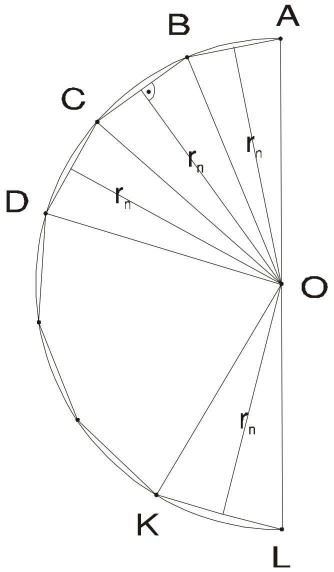
$$V = \frac{1}{3} h S_{AB}$$

гдје је h дужина одговарајуће висине, а S_{AB} површина омотача купе настале ротацијом странице AB око осе xy (1.случај-сл.14а); површина омотача зарубљене купе настале ротацијом странице AB око осе xy (2.случај-сл.14б); односно површина омотача ваљка насталог ротацијом исте странице око осе xy (3.случај-сл.14в).

Запремина лопте настале ротацијом полукруга око једног пречника, јесте граница којој тежи запремина обртног тијела које настаје обртањем око исте осе правилног полигона уписаног у датом полукругу кад број страница полигона n неограничено расте.

На основу слике 15, може се закључити, да је запремина тијела насталог обртањем правилног полигона ABC…KL, једнака збиру запремина тијела образованих ротацијом троуглова AOB, BOC,..., KOL.

Према теореми је:



Слика 15

$$V_{AOB} = \frac{1}{3} r_n \cdot S_{AB}$$

$$V_{BOC} = \frac{1}{3} r_n \cdot S_{BC}$$

$$-----------$$

$$V_{KOL} = \frac{1}{3} r_n \cdot S_{KL}$$

$$V_{AOB} + V_{BOC} + \ldots + V_{KOL} = \frac{1}{3} r_n \left(S_{AB} + S_{BC} + \ldots + S_{KL} \right)$$

$$V_{AOB} + V_{BOC} + \ldots + V_{KOL} = V_n \wedge S_{AB} + S_{BC} + \ldots + S_{KL} = S_n$$

$$V_n = \frac{1}{3} r_n \cdot S_n$$

Када број страница правилног полигона n неограничено расте, онда површина која настаје обртањем одговарајуће правилне изломљене линије тежи својој граници – површини лопте $4r^2\pi$, а висина r_n полупречнику лопте.

Запремина лопте:

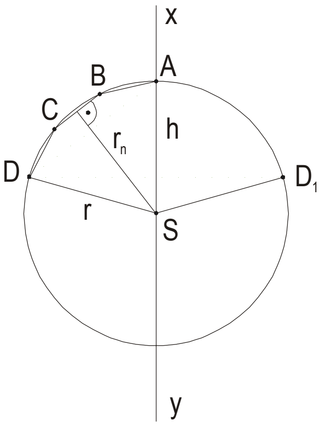
$$V = \frac{1}{3} r \cdot 4r^2\pi \text{ или } V = \frac{4}{3} r^3\pi$$

Запремине лопти се односе као кубови њихових полупречника

$$\frac{V_{L_1}}{V_{L_2}} = \frac{r_1^3}{r_2^3}$$

ЗАПРЕМИНА ДИЈЕЛОВА ЛОПТЕ

ЗАПРЕМИНА ЛОПТИНОГ ИСЈЕЧКА (СЕКТОРА)



Слика 16

Ако је r дужина полупречника лопте, h дужина висине калоте једног исјечка лопте, запремина исјечка је:

$$V = \frac{2}{3} r^2 \pi h$$

Доказ:

Нека је у кружном исјечку SAD (сл.16) уписан исјечак једног правилног полигона, чијом ротацијом око осе xy настаје једно обртно тијело. Запремина тог тијела на основу теореме:

$$V_n = M \frac{r_n}{3}$$

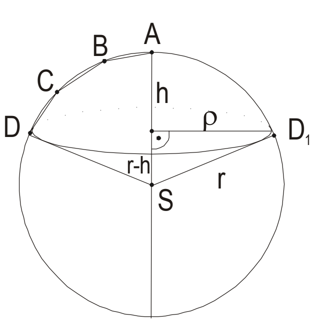
гдје је M површина коју описује правилна изломљена линија ABCD ротацијом око осе xy, а r_n– висина те линије.

Запремина лоптиног исјечка је граница којој V_n, кад број страна n правилног полигона неограничено расте.

У том случају M тежи површини калоте, а r_n полупречнику лопте, па је запремина исјечка:

$$V = 2r\pi h \frac{r}{3} \text{ или } V = \frac{2}{3} r^2 \pi h$$

ЗАПРЕМИНА ЛОПТИНОГ ОДСЈЕЧКА



Слика 17

Ако је r дужина полупречника лопте, h дужина висине њеног одсјечка, запремина тог одсјечка је:

$$V = \frac{1}{3} \pi h^2 (3r - h)$$

Доказ:

Запремина лоптиног одсјечка (сл.17) се добија када се од запремине лоптиног исјечка V_i $SDAD_1$одузме V_k купе SDD_1

$$V = V_i - V_k$$

$$V = \frac{2}{3} r^2 \pi h - \frac{1}{3} \rho^2 \pi (r - h)$$

ρ – полупречник основе купе, односно одсјечка

$$\rho^2 = r^2 - (r-h)^2 = 2rh - h^2, \rho^2 = h(2r-h)$$

Према томе:

$$V = \frac{2}{3} r^2 \pi h - \frac{1}{3} h\pi (2r-h)(r-h)$$

$$V = \frac{h\pi}{3}\left[2r^2 - (2r-h)(r-h)\right]$$

$$V = \frac{h\pi}{3}\left(3rh - h^2\right)$$

$$V = \frac{h^2\pi}{3}(3r-h)$$

Запремина одсјечка се често изражава преко полупречника основе одсјечка ρ

$$\rho^2 = 2rh - h^2$$

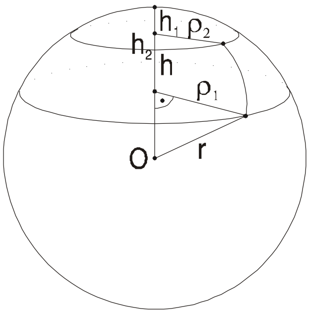
$$r = \frac{\rho^2 + h^2}{2h}$$

$$V = \frac{h^2\pi}{3}(3r-h)$$

$$V = \frac{h^2\pi}{3}\left(\frac{3\rho^2 + 3h^2 - 2h^2}{2h}\right)$$

$$V = \frac{h\pi}{6}\left(3\rho^2 + h^2\right)$$

ЗАПРЕМИНА ЛОПТИНОГ СЛОЈА



Слика 18

Запремина лоптиног слоја (сл.18) једнака је разлици запремина одговарајућих одсјечака.

$$V = \frac{h_2^2\pi}{3}(3r - h_2) - \frac{h_1^2\pi}{3}(3r - h_1)$$

$$\rho_1^2 = 2rh_1 - h_1^2$$

$$\rho_2^2 = 2rh_2 - h_2^2$$

$$h = h_2 - h_1$$

$$V = \frac{h_2^2\pi}{3}(3r - h_2) - \frac{h_1^2\pi}{3}(3r - h_1), V = \frac{\pi}{3}\left(3rh_2^2 - h_2^3 - 3rh_1^2 + h_1^3\right)$$

$$V = \frac{\pi}{3}\left[3r\left(h_2^2 - h_1^2\right) - \left(h_2^3 - h_1^3\right)\right], V = \frac{\pi h}{3}\left(3rh_2 + 3rh_1 - h_2^2 - h_1h_2 - h_1^2\right)$$

$$V = \frac{\pi h}{3}\left[\left(\rho_2^2 + rh_2\right) + \rho_1^2 + rh_1 - h_1h_2\right], V = \frac{\pi h}{3}\left(\rho_1^2 + \rho_2^2 + rh_1 + rh_2 - h_1h_2\right)$$

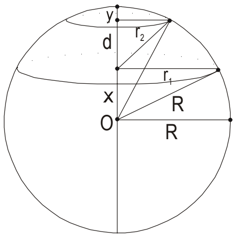
$$V = \frac{\pi h}{3} \cdot \frac{2\rho_1^2 + 2\rho_2^2 + \rho_2^2 + \rho_1^2 + \left(h_1^2 + h_2^2 - 2h_1h_2\right)}{2}$$

$$V = \frac{\pi h}{6}\left[3\rho_1^2 + 3\rho_2^2 + \left(h_2 - h_1\right)^2\right]$$

$$V = \frac{\pi h}{6}\left(3\rho_1^2 + 3\rho_2^2 + h^2\right)$$

Примјер 2

Са исте стране од центра постављене су двије паралелне равни које пресијецају лопту. Растојање равни је 9 cm, а површине кругова у пресјецима су 400π cm^2 и 49π cm^2. Одредити P и V лопте, као и P зоне и V слоја.(сл.19)



Слика 19

Први потез – израчунати *R* лопте.
Полупречници кругова који настају пресијецањем лопте двјема паралелним равнима су r$_1$=20cm, r$_2$=7cm
Примјенимо Питагорину теорему

$$R^2 = r_1^2 + x^2$$

$$R^2 = r_2^2 + (d+x)^2$$

$$\overline{}$$

$$d^2 + 2dx + r_2^2 - r_1^2 = 0$$

$$x = 15$$

$$R^2 = d^2 + r_1^2 \Rightarrow R = 25$$

V лопте, *P* сфере, *P* зоне, *V* слоја добијамо увртштавањем добијених вриједности у одговарајуће обрасце:

$$V_L = \frac{4}{3}R^3\pi = \frac{62500\pi}{3}cm^3$$

$$P_S = 4R^2\pi = 2500\pi cm^2$$

$$P_Z = 2R\pi h_Z = 450\pi cm^2$$

$$V_S = \frac{\pi h}{6}\left(3r_1^2 + 3r_2^2 + h^2\right) = 2142\pi cm^3$$

ИЗВОЂЕЊЕ ОБРАСЦА ЗА ЗАПРЕМИНУ ЛОПТЕ И ДИЈЕЛОВА ЛОПТЕ ПОМОЋУ ИНТЕГРАЛА

Запремина тијела насталог ротацијом лика омеђеног кривом y=f(x), осом O$_x$, правама x=a и x=b (a<b око осе O$_x$ израчунава се обрасцем:

$$V = \pi\int_a^b y^2 dx$$

Према томе:

$$V = \pi\int_{-R}^{R}\left(R^2 - x^2\right)dx = 2\pi\int_0^R (R^2 - x^2)dx$$

$$V = 2\pi\left(R^2x - \frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_0^R = 2\pi\left(R^3 - \frac{R^3}{3}\right)$$

$$V = \frac{4}{3}R^3\pi$$

ЗАПРЕМИНА ЛОПТИНОГ ОДСЈЕЧКА

$$V_x = \pi \int\limits_{R-H}^{R} y^2 dx = \pi \int\limits_{R-H}^{R} \left(R^2 - x^2\right) dx = \pi \left(R^2 x - \frac{x^3}{3} \right)\Bigg|_{R-H}^{R} = \frac{2}{3} R^3 \pi - \pi R^2 (R-H) + \frac{(R-H)^3 \pi}{3}$$

$$V = \frac{H^2 \pi}{3} (3R - H)$$

ЗАПРЕМИНА ЛОПТИНОГ ИСЈЕЧКА

$$V_i = V_0 + V_k$$

V_O – запремина лоптиног одсјечка висине H

$$V_O = \frac{H^2 \pi}{3} (3R - H)$$

V_K- запремина купе висине R-H

Једначина праве y=f(x), која садржи тачке O(0,0) и A(r,R-H) гласи:

$$\frac{x}{r} = \frac{y}{R-H} \qquad x^2 = \frac{r^2}{(R-H)^2} y^2$$

$$V_K = \pi \int\limits_{0}^{R-H} x^2 dx = \frac{r^2 \pi}{(R-H)^2} \int\limits_{0}^{R-H} y^2 dy = \frac{r^2 \pi}{(R-H)^2} \cdot \frac{y^3}{3}\Bigg|_{0}^{R-H} = \frac{r^2 \pi (R-H)}{3}$$

$$r^2 = R \quad - (R-H)^2$$

$$V_K = \frac{\left(2RH - H^2\right)(R-H)\pi}{3} = \frac{2R^2 H\pi - 3RH^2 \pi + H^3 \pi}{3}$$

$$V_i = H^2 R\pi - \frac{H^3 \pi}{3} + \frac{2R^2 H\pi}{3} - RH^2 \pi + \frac{H^3 \pi}{3}$$

$$V_i = \frac{2}{3} R^2 \pi H$$

ЗАПРЕМИНА ЛОПТИНОГ СЛОЈА

r_1,r_2 – полупречници основа слоја

$$V = \pi \int\limits_{a}^{b} \left(R^2 - x^2\right) dx = \pi \left(R^2 x - \frac{x^3}{3} \right)\Bigg|_{a}^{b} = \pi \left(R^2 b - \frac{b^3}{3} - R^2 a + \frac{a^3}{3} \right)$$

$$a = \sqrt{R^2 - r_1^2} \qquad b = \sqrt{R^2 - r_2^2}$$

$$V = \frac{\pi h}{6} \left(3r_1^2 + 3r_2^2 + h^2\right)$$

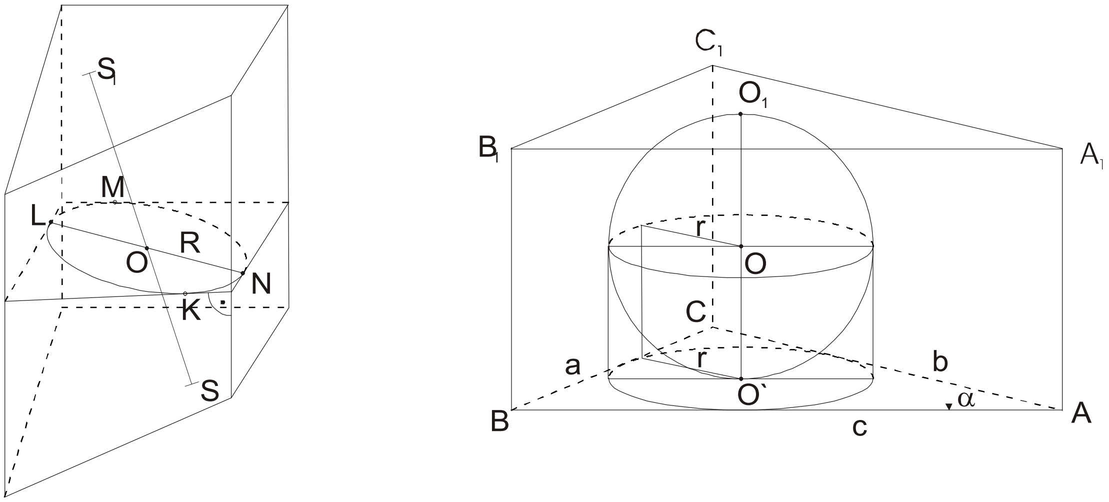
УЗАЈАМНИ ПОЛОЖАЈ ЛОПТЕ И ДРУГИХ ТИЈЕЛА

ЛОПТА И ПОЛИЕДРИ

Полиедар чија сва тјемена припадају сфери је *уписан* у сферу, а сфера је описана око њега. Полиедар чије све стране додирују сферу је *описан* око сфере, а она уписана у њега.

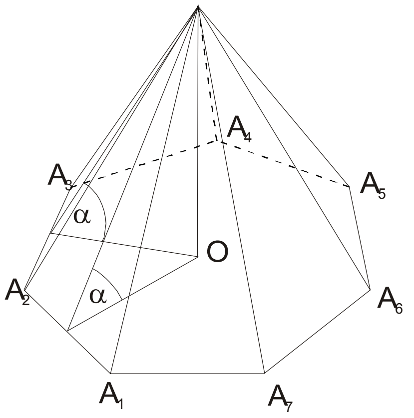
За сферу уписану у полиедар важи сљедеће: ако се у полиедар може уписати сфера, њен центар се налази у тачки пресјека симетралних равни свих углова диедра датог полиедра.

Тврђење у вези са призмом: да би се у призму могла уписати сфера, потребно је и довољно да се у њен нормалан пресјек може уписати круг чији је пречник једнак висини призме (сл.20).



Слика 20

Тврђење у вези са пирамидом: да би се у пирамиду могла уписати сфера, довољно је да нагибни углови бочних страна према основи пирамиде буду једнаки (сл.21).



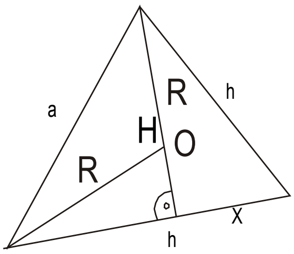
Слика 21

Твђење везано за сферу описану око полиедра: ако се око полиедра може описати сфера, тада њен центар лежи у тачки пресјека симетралних равни свих ивица полиедра.

Ако је око неког полиедра описана сфера са центром у тачки *O*, тада је тачка *O* једнако удаљена од свих тјемена полиедра.

Примјер 3

Наћи полупречник сфере описане око правилног тетраедра ивице *a*



Слика 22

Тетраедаар има све ивице једнаке његов попречни пресјек изгледа као на слици.

$$H^2 = h^2 - x^2$$

$$H^2 = a^2 - (h-x)^2$$

рјешавањем овог система добијамо да је

$$x = \frac{a\sqrt{3}}{6}$$

уврштавањем вриједности x у неку од наведених релација

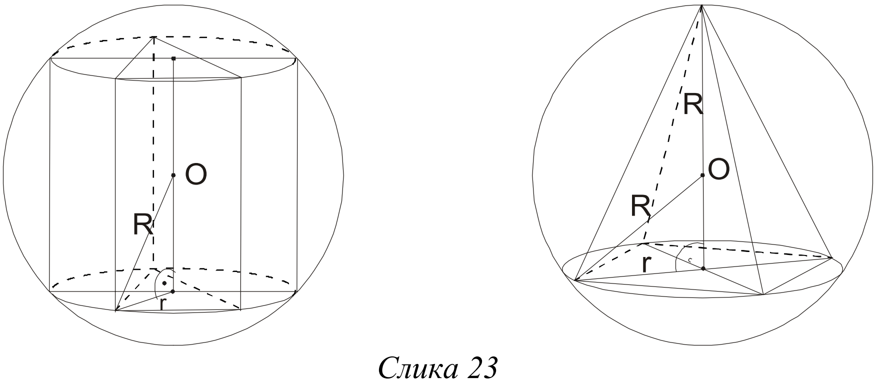
добијамо да је : $H = \frac{a\sqrt{6}}{3}$

$$(h-x)^2 = R^2 - (H-R)^2$$

рјешавањем једначине добијамо да је полупречник лопте описане око тетраедра:

$$R = \frac{a\sqrt{6}}{4}$$

Да би се око призме могла описати сфера, потребно је и довољно да призма буде права и да се око њене основе може описати круг, што важи и за пирамиду (сл.23).

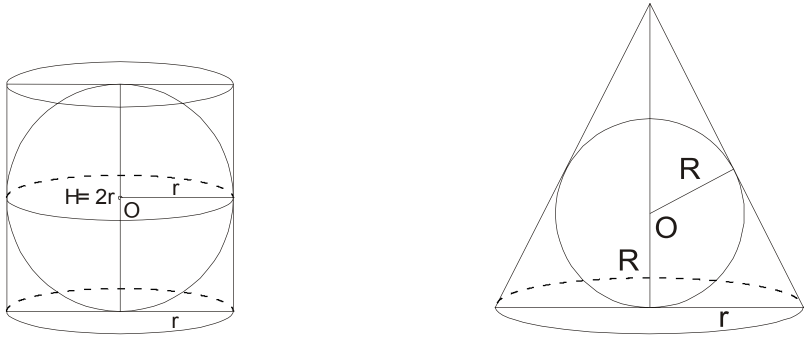


Слика 23

ЛОПТА И ОБРТНА ТИЈЕЛА

Лопта је уписана у прав ваљак ако основе и све изводнице ваљка додирују лопту, што је могуће ако је пречник основе ваљка једнак висини ваљка (сл.24а).

Лопта је уписана у праву купу ако основа и све изводнице купе додирују лопту, што је увијек могуће (сл.24б).



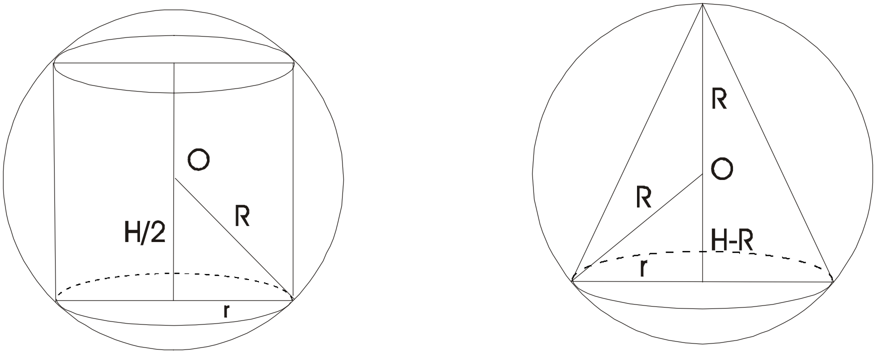
а) б)

Слика 24

Лопта је описана око ваљка ако су основе ваљка пресјеци лопте, тако да се око сваког ваљка може описати лопта (сл.25а).

Лопта је описана око купе ако је основа купе пресјек лопте и ако врх купе припада одговарајућој сфери, пема томе, око сваке купе се може описати лопта (сл.25б).

Сфера се може уписати у зарубљену купу само ако је њен осни пресјек, једнакокраки трапез, тангентни четвороугао.

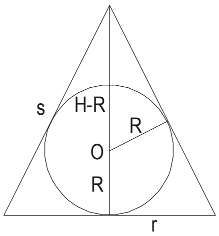


а) б)

Слика 25

Примјер 4

Око сфере полупречника R=1,5 cm описана је права купа чија је површина осниве једнака површини сфере. Одредити однос запремина лопте и купе .



Слика 26

С обзиром да је површина основе купе једнака површини лопте која је у њу уписана

$$r^2\pi = 4R^2\pi \Rightarrow r = 3$$

$$\frac{r}{R} = \frac{s}{H-R}$$

$$s = 2H - 3$$

$$H^2 = s^2 - r^2$$

из посљедње двије релације слиједи да је $H = 4$.

Запремине лопте и купе добијамо уврштавањем вриједности полупречника и висина у одговарајуће формуле :

$$V_L = \frac{4}{3}R^3\pi = 4{,}5\pi cm^3$$

$$V_K = \frac{1}{3}r^2 h\pi = 12\pi cm^3$$

Однос запремина лопте и купе:

$$\frac{V_L}{V_K} = \frac{8}{3}$$

СИМПСОНОВА ФОРМУЛА

Нека је *T* неко геометријско тијело, нека су σ_1 и σ_3 двије паралелне равни које га ссијеку и нека је Φ онај дио тијела *T* који се налази између равни σ_1 и σ_3. Површ $\sigma_1 \cap T$ зове се горњи пресјек, а површ $\sigma_3 \cap T$ доњи пресјек тијела Φ. Нека је σ_2 раван паралелна равнима σ_1 и σ_3 која се налази између њих и на једнаком растојању од њих. Површ $\sigma_2 \cap T$ (или $\sigma_2 \cap \Phi$) зове се пресјек тијела Φ.

За запремину V(Φ) тијела важи формула:

$$V(\Phi) = \frac{1}{6}(B_1 + 4B_2 + B_3)H$$

Гдје су B_1, B_2, B_3 површине горњег, средњег, односно доњег пресјека тијела Φ, а *X* је висина тог тијела (тј. растојање између равни σ_1 и σ_3).

Ова формула се назива Симпсонова и често се примјењује у пракси приликом израчунавања запремина буради, стабала, стогова . . . Овом формулом се потпуно тачно израчунавају запремине призме, пирамиде, зарубљене пирамиде, ваљка, купе, зарубљене купе и лопте.

ЛИТЕРАТУРА

- ТАТОМИР АНЂЕЛИЋ: *Елементарна геометрија*
  Техничка књига, Београд,1954.

- МИЛОШ РАДОЈИЧИЋ: *Елементарна геометрија – основе и елементи еуклидске геометрије*
  Научна књига, Београд, 1961.

- ВЛАДИМИР БЕНИЋ: *Елементарна геометрија*
  Школска књига, Загреб, 1969.

- мр ВЕНЕ Т. БОГОСЛАВОВ: *Збирка решених задатака из математике, 3*
  Завод за уџбенике и наставна средства, Београд, 1999.