ИЗВОДИ

Dabić Nena

Извод као појам се први пут појављује крајем XVII вијека у вези са израчунавањем неравномјерних кретања. Прецизније, помоћу извода је било могуће увести појам тренутне брзине праволинијског кретања. Уопште, помоћу извода се може представити брзина промјене величина које се неравномјерно мијењају (нпр. температуре тијела, електричне струје, масе тијела при радиоактивном распадању итд.). Појам извода се појавио и увези са налажењем тангенте криве у тачки. У том смислу, појам извида заузима значајно мјесто у математици и њеним примјенама.
Појам извода настао је из проблема тангенте криве линије и проблема брзине кретања.. Први проблем је разрадио Лајбниц (1646-1716), а проблему брзине кретања пажњу је посветио Њутн (1642-1727).
Многи математичари су прије Лајбница покушавали да ријеше проблем тангенте. Карактеристично је за те покушаје да у себи садрже такве аналитичке и геометријске поступке који јасно показују како се из настојања да се ријеши проблем тангенте нужно рађао појам извода. Тада се и испољила идеја да се тангента криве схвати као гранична сјечица којој тежи сјечица криве, када се једна од пресјечних тачака бескрајно приближава по кривој другој пресјечној тачки. Основна препрека на коју су наилазили Лајбницови претходници, када су рјешавали проблем тангенте, јесте природа рачуна са бескрајно малим величинама.
Велики значај за појаву извода имао је Декарт (1596-1650) када је засновао методу координата, објављивањем *Геометрије* 1637. године. Наиме, на тај начин је омогућио да се криве линије означавају једначинама и то је био битан предуслов за откриће опште методе ријешења проблема тангенте.

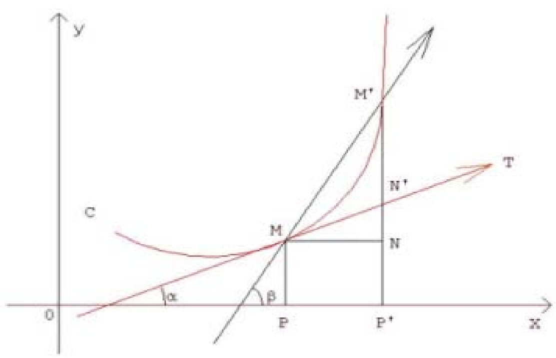
Лајбниц, схвативши значај и смисао Декартове промјенљиве, као и занчај методе координата, је успио да ријеши проблем тангенте увођењем појма извода односно диференцијала (*Nova Methodus pro maximis itemque tangentibus et singulare pro illis calculi genus*, 1684). Односно схватио је тангенту као граничну сјечицу, док су се ова два појма у периоду прије њега увијек посматрали одвојено. У обом открићу му је веома помогао његов филозофски став изражен „законом континуитета``, према којем се свака промјена дешава постепено, без скокова ( „Natura non facit saltus``).

Њутн је дошао до појма извода студирајући проблем брзине кретања. У својој расправи *Метод флуксија и бескрајних редова,* Њутн је најприје ријешио проблем проналажења брзине кретања у датом тренутку када је пређени пут познат као функција времена, а затим проблем проналажења пута када је брзина позната као функција времена. Величину која зависи непрекидно од времена, Њутн је назвао ***флуента*** (fluere лат. – тећи), а брзину којом се мијења флуента у току времена ***флуксијом*** (fluxio лат. – струјање). За типичан примјер флуенте Њутн је узео пут покретне тачке.

Схватање извода као флуксије указује на пријекло појма извода, односно како је тај појам проистекао из проблема кретања, из проблема до којих се долази посматрањем и пручавањем свијета, и показује су и закони математичког мишљења ,, закони извучени из стварног свијета`` (Ф. Енгелс) и како ,, идеално није ништа друго до материјално пресађено у човјекову главу и преображено у њој`` (К. Маркс).

Тангента

Нека је дата крива *C* са једначином $y = f(x)$ и произвољна тачка M(x_0, y_0) на њој (слика 1). Да бисмо нашли тангенту ове криве у тачки M повуцимо, кроз тачку M и још једну тачку M' (x, y) на кривој, сјечицу MM'. Када се тачка M'дуж криве *C* пиближава тачки M, онда ће се сјечица MM' приближавати правој MT, која се зове ***тангента*** криве *C* у тачки M(x_0, y_0).



слика 1

Тангента MT криве *C* у тачки M је гранични положај сјечице MM'кад тачка M' тежи тачки M. Ако се са β означи угао који сјечица MM' гради са Ox осом, а са α угао који тангента MT заклапа са Ox осом, онда је према дефиницији тангенте,

$$\lim_{M \to M'} \beta = \alpha$$

Ако ова гранична вриједност постоји онда постоји и тангента криве у тачки M, ако пак гранична вриједност не постоји онда нема ни тангенте криве. Тачка M' може се налазити било са лијеве, било са десне сране тачке M. Ако се тачка M' налази са десне стране тачке M и ако постоји гранична вриједност

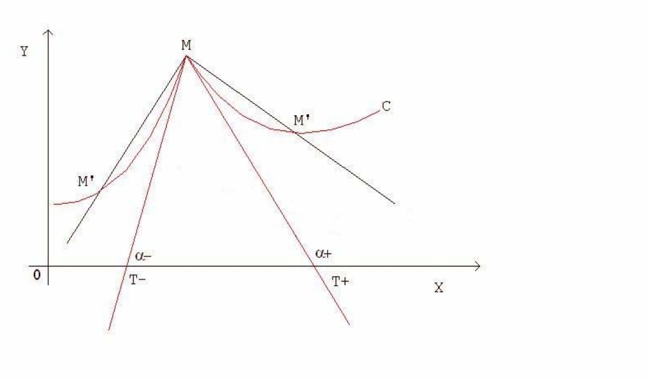
$$\lim_{M \to M'+} \beta = \alpha_+$$

онда је MT_+ *десна тангента* криве ц у тачки М.

А ако је тачка М' са лијеве стране тачке М и ако постоји гранична вриједност

$$\lim_{M \to M'_-} \beta = \alpha_-$$

Онда је MT_- *лијева тангента* криве *C* у тачки М (слика 2).



слика 2

Ако је $\alpha_+ = \beta_-$, онда се *десна* и *лијева* тангента поклапају, тј. **постоји тангента** у тачки М криве *C*.

Нека је крива $y = f(x)$ дефинисана у близини тачке М (x_0, y_0) и нека је М' (x, y) њена оближња тачка, тада је (слика 1).

$$OP = x_0, \quad PM = y_0 = f(x_0)$$
$$OP' = x \quad P'M' = y = f(x)$$

А одавде је

$$tg\beta = \frac{NM'}{MN} = \frac{P'M' - P'N}{OP' - OP} = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

Када тачка М' тежи тачки М, тј. кад x тежи ка x_0, тада ће сјечица ММ'тежити тангенти МТ а угао β тежити углу α. Према томе је

$$tg\alpha = \lim_{x \to x_0} tg\beta = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

Под условом да ова гранична вриједност постоји и у том случају она представља ***угаони коефицијент*** тангенте МТ криве $y = f(x)$ у тачки М(x_0, y_0) (слика 1).
Ако ставимо да је $x = x_0 + h$, гдје $h \to 0$ кад $x \to x_0$, онда се једначина граничне вриједности може написати у облику

$$tg\alpha = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

На основу ове релације ријешавамо проблем тангенте, што се може приказати следећим примјером

ПРИМЈЕР

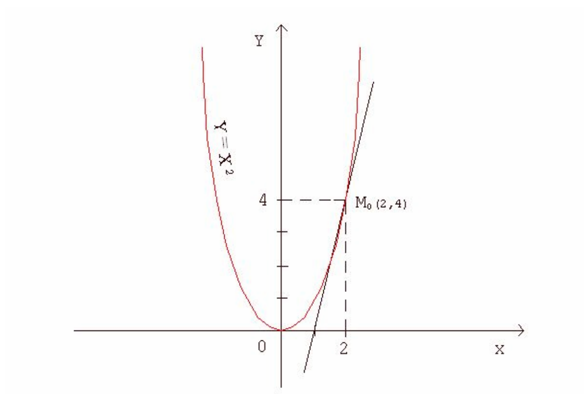
Одредити једначину тангенте параболе $y = x^2$ кроз тачку M_0 (2, 4) на параболи.

Једначина тангенте криве кроз тачку има облик
$y - y_1 = k(x - x_1)$ на основу чега имамо $y - 4 = k(x - 2)$, гдје је $k = tg\alpha$ коефицијент правца који се израчунава по формули једначине граничне вриједности:

$$k = tg\alpha = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(2+\Delta x)^2 - 2^2}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{4 + 4\Delta x + \Delta x^2 - 4}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta x(4+\Delta x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0}(4+\Delta x) = 4$$

па ће из овога једначина тангенте бити

$y - 4 = 4(x-2)$, или $y = 4x - 4$.



Дефиниција извода

Нека је $y = f(x)$ у интервалу (a, b) и нека је M (x_0, y_0) једна тачка у томе интервалу (слика 1). Ако је $\Delta x_0 = h$ прираштај аргумента x_0, у том случају ће прираштај функције y_0 бити Δy_0 тј.

$$y_0 + \Delta y_0 = f(x_0 + h)$$

Или

$$\Delta y_0 = f(x_0 + h) - f(x_0)$$

Количник прираштаја функције и прираштаја независно промјенљиве

$$\frac{\Delta y_0}{\Delta x_0} = \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}$$

претставља *средњи прираштај* функције $y = f(x)$ у интервалу $[x_0, x_0 + h]$, а уједно претставља и нагиб функције $y = f(x)$ у интервалу $[x_0, x_0 + h]$ – односно нагиб сјечице MM', која пролази кроз тачке $M(x_0, y_0)$ и
M' $[x_0 + h, f(x_0 + h)]$, према оси Ox.

Уколико овај количник тежи некој граничној вриједности (коначној или бесконачној) кад h тежи нули ма на који начин, онда се та гранична вриједност назива ***извод*** функције y = f(x) у тачки x_0 и обиљежава се

$$\lim_{\Delta x0\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}=f'(x_0)$$

$$\lim_{\Delta x0\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x0\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x_0)-f(x_0)}{\Delta x_0}=f'(x_0)$$

Према томе, извод функције y = f(x) у тачки x_0 је гранична вриједност количника прираштаја функције и прираштаја независно промјенљиве у тачки x_0 кад прираштај независно промјемљиве тежи нули.

Ако се умјесто тачке x_0 узме произвољна тачка x у интервалу (a, b), онда ће извод функције *y = f(x)* у тој тачки гласити:

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=f'(x)$$

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=f'(x)$$

Извод функције $y=f(x)$ обиљежава се још и са ознакама

$$\frac{dy}{dx}, y'_x, f'_x, Dy, Df(x)$$

Рјешавањем проблема везаних за проблем тенутне брзине тијела и проблем тангенте криве, можемо дати следеће формулације:

- **механичко тумачење извода -** извод функције у тачки представља тренутну брзину (у моменту) тијела које се креће правилно праволинијски по закону
- **геометријско тумачење извода** – извод функције у тачки представља коефицијент правца тангенте графика те функције у тачки M_0 на графику са апсцисом

Примјер 1

Одредити извод функције $f(x)=\sqrt[3]{x-a}$ према дефиницији

$$f'(x)=\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=\frac{\sqrt[3]{x+\Delta x-a}-\sqrt[3]{x-a}}{\Delta x}\cdot\frac{\sqrt[3]{(x+\Delta x-a)^2}+\sqrt[3]{(x+\Delta x-a)(x-a)}+\sqrt[3]{(x-a)^2}}{\sqrt[3]{(x+\Delta x-a)^2}+\sqrt[3]{(x+\Delta x-a)(x-a)}+\sqrt[3]{(x-a)^2}}$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{x+\Delta x-a-x+a}{\Delta x\left(\sqrt[3]{(x+\Delta x-a)^2}+\sqrt[3]{(x+\Delta x-a)(x-a)}+\sqrt[3]{(x-a)^2}\right)}$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{1}{\sqrt[3]{(x-a)}^2+\sqrt[3]{(x-a)(x-a)}+\sqrt[3]{(x-a)^2}}=\frac{1}{3\sqrt[3]{(x-a)^2}}$$

Примјер 2

Одредити извод функције $f(x) = x^2 \sin 2x$ према дефиницији

$$f'(x) = \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(x+\Delta x)^2 \sin 2(x+\Delta x) - x^2 \sin 2x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(x^2 + 2x\Delta x + \Delta x^2)\sin(2x+2\Delta x) - x}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{x^2 \sin(2x+2\Delta x) + 2x\Delta x \sin(2x+2\Delta x) + \Delta x^2 \sin(2x+2\Delta x) - x^2 \sin 2x}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{x^2 [\sin(2x+2\Delta x) - \sin 2x] + 2x\Delta x \sin(2x+2\Delta x) + \Delta x^2 \sin(2x+2\Delta x)}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{x^2 \cdot 2\cos\frac{2x+2\Delta x+2x}{2} \cdot \sin\frac{2x+2\Delta x-2x}{2}}{\Delta x} + \lim_{\Delta x \to 0} \frac{2x\Delta x \sin(2x+2\Delta x)}{\Delta x} + \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta x^2 \sin(2x+2\Delta x)}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{x^2 2\cos(2x+\Delta x) \cdot \sin \Delta x}{\Delta x} + \lim_{\Delta x \to 0} 2x \sin(2x+2\Delta x) + \lim_{\Delta x \to 0} \Delta x \sin(2x+2\Delta x)$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} x^2 2\cos(2x+\Delta x) \cdot 1 + 2x \sin 2x + 0$$

$$= 2x^2 \cos 2x + 2x \sin 2x = 2x(x\cos 2x + \sin 2x)$$

Изводи елементарних функција

1⁰ Нека је $f(x) = C = const.$, за свако x. Тада је за призвољно x: $f(x+\Delta x) = C$, па је

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = 0$$

Дакле, извод константе једнак је нули тј. $(C)' = 0$

Примјер

$f(x) = 5$, а извод ове функције ће бити $f'(x) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{5-5}{\Delta x} = 0$

2⁰ Нека је $y = x$ тада је:

$y + \Delta y = x + \Delta x$, $\quad \Delta y = \Delta x \;\Rightarrow \frac{\Delta y}{\Delta x} = 1$ а из овога слиједи:

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = 1$$

Примјер

$y = 12x$

$$f(x)' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{12(x+\Delta x) - 12x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{12x - 12\Delta x - 12x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{12\Delta x}{\Delta x} = 12$$

3^0 Дата је функција $f(x)=x^n$ при чему $n\in N$.

$$f'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{(x+\Delta x)^n-x^n}{\Delta x}\Big/\frac{x^n}{x^n}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\left(1+\dfrac{\Delta x}{x}\right)^n-1}{\dfrac{\Delta x}{x^n}}=\lim_{\Delta x\to 0}x^{n-1}\frac{\left(1+\dfrac{\Delta x}{x}\right)^n-1}{\dfrac{\Delta x}{x}}=n\cdot x^{n-1}$$

гдје смо искористили граничну вриједност $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1+x)^n-1}{x}=n$

за $x=0$ добија се

$$f'(0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{(0+\Delta x)^n-0^n}{\Delta x}=\begin{Bmatrix}1, n=1\\ \lim(\Delta x)^{n-1}=0, n=2,3,\ldots\end{Bmatrix}$$

На основу претходног закључујемо да је

$f'(x)=nx^{n-1}$, или $(x^n)'=nx^{n-1}$.

Примјери

$f(x)=x^7$

$f'(x)=7x^6$

$f(x)=\sqrt{x}=x^{\frac{1}{2}}$

$f'(x)=\dfrac{1}{2}x^{\frac{1}{2}-1}=\dfrac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$

$f(x)=\sqrt[3]{x^2}=x^{\frac{2}{3}}$

$f'(x)=\dfrac{2}{3}x^{\frac{2}{3}-1}=\dfrac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}}=\dfrac{2}{3\sqrt[3]{x}}$

4^0 За функцију $f(x)=a^x$, $a>0, a\neq 1$ имамо да је

$$f'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{a^{x+\Delta x}-a^x}{\Delta x}=a^x\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\left(a^{\Delta x}-1\right)}{\Delta x}=a^x\cdot\ln a$$ тј.

$(a^x)'=a^x\cdot\ln a$

приликом чега смо примјенили граничну вриједност $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{a^x-1}{x}=\ln a$, $a\neq 0$.

Примјер

$y=10^x$

$$y'=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{10^{(x+\Delta x)}-10^x}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{10^x\left(10^{\Delta x}-1\right)}{\Delta x}=10^x\cdot\ln 10$$

5^0 Уколико замјенимо a са e тј. за $a=e$ извод такве функције $f(x)=e^x$ ће бити:

$$f'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{e^{x+\Delta x}-e^x}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{e^x\left(e^{\Delta x}-1\right)}{\Delta x}=e^x$$ па је

$(e^x)'=e^x$

Овдје смо примјенили следећу граничну вриједност $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{e^x-1}{x}=\ln e=1$.

6^0 Одредимо извод функције $y = \ln x$

Нека је $x > 0$ фиксирано а Δx такво да је $x + \Delta x > 0$. Тада се примјеном граничне $\lim\limits_{t\to 0}\frac{\ln(1+t)}{t} = 1$ вриједности добија

$$y' = \lim_{\Delta x\to 0} = \frac{\ln(x+\Delta x) - \ln x}{\Delta x} / \frac{x}{x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\ln\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)}{\frac{\Delta x}{x}}\cdot\frac{1}{x} = \frac{1}{x}$$

Дакле, $(\ln x)' = \frac{1}{x}$

7^0 Одредити изводе функција:

а) $f(x) = \sin x$ б) $f(x) = \cos x$

а) Како је

$$\Delta y = f(x+\Delta x) - f(x) = \sin(x+\Delta x) - \sin x = 2\cos\frac{x+\Delta x + x}{2}\cdot\sin\frac{x+\Delta x - x}{2} = 2\cos\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right)\cdot\sin\frac{\Delta x}{2}$$

те се добија

$$f'(x) = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{2\cos\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right)\sin\frac{\Delta x}{2}}{\Delta x} / \frac{2}{2} = \lim_{\Delta x\to 0}\cos\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right)\cdot\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\sin\frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}} = \cos x\cdot 1 = \cos x$$

гдје смо искористили граничну вриједност $\lim\limits_{t\to 0}\frac{\sin t}{t} = 1$ и непрекидност функције $\cos x$.

На основу претходног је $(\sin x)' = \cos x$.

б) А извод функције $f(x) = \cos x$ ће бити:

Како је

$$\Delta y = \cos(x+\Delta x) - \cos x = -2\sin\left(\frac{x+\Delta x + x}{2}\right)\cdot\sin\left(\frac{x+\Delta x - x}{2}\right) = -2\sin\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right)\cdot\sin\frac{\Delta x}{2}$$

добиће се следеће

$$f'(x) = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{-2\sin\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right)\cdot\sin\frac{\Delta x}{2}}{\Delta x} / \frac{2}{2} = \lim_{\Delta x\to 0} - \sin\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right)\cdot\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\sin\frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}} = -\sin x\cdot 1 = -\sin x$$

, с тим да смо опет искористили исту граничну вриједност тј. $\lim\limits_{t\to 0}\frac{\sin t}{t} = 1$ па из овога добијамо таблични извод

$$(\cos x)' = -\sin x$$

Основне теореме о изводу

У претходним примјерима је приказано како се помоћу примјене дефиниције извода могу наћи изводи неких елементарних функција у произвољној унутрашњој тачки њихових области дефинисаности. Међутим, у неким функцијама које су сложеније структуре, тај поступак може да буде компликован, односно задавао би многе аналитичке потешкоће. Да бисмо избегли овај проблем настојаћемо да користимо одређена правила која ће нам помоћи да на што једноставнији начин пронађемо изводе осталих функција.

извод збира, разлике, производа и количника

Теорема

Ако свака од функција $u(x)$ и $v(x)$ има свој извод у тачки x, тада функција $C\cdot u(C=const.)$ и збир, разлика, производ и количник функција и (у случају количника треба претпоставити да је $v(x)\neq 0$) такође имају извод у тачки x и при том важе следеће формуле:

а) $[Cu(x)]' = Cu'(x)$

б) $[u(x)\pm v(x)]' = u'(x)\pm v'(x)$

в) $[u(x)\cdot v(x)]' = u'(x)\cdot v(x)+u(x)\cdot v'(x)$

г) $\left[\dfrac{u(x)}{v(x)}\right]' = \dfrac{u'(x)\cdot v(x)-u(x)\cdot v'(x)}{v^2(x)}$

Примјери

Примјеном таблица извода и основних правила извода одредити изводе функција дефинисаних формулама.

1^0

$$f(x)=2x\sqrt{x}=2x\cdot x^{\frac{1}{2}}=2x^{\frac{3}{2}}$$

$$f'(x)=\frac{3}{2}\cdot 2x^{\frac{3}{2}-1}=3x^{\frac{1}{2}}=3\sqrt{x}$$

2^0

$$y=(x^2+a^2)(x^2-a^2)=x^4-a^4$$

$$y'=4x^3$$

3^0

$$y=\sqrt[3]{x}-\frac{2}{\sqrt{x}}+\frac{3}{x^2}-\frac{1}{5x^3}+4=x\frac{1}{3}-2x^{\frac{-1}{2}}+3x^{-2}-\frac{1}{5}x^{-3}+4$$

$$y'=\frac{1}{3}x^{\frac{-2}{3}}-2\left(\frac{-1}{2}\right)x^{\frac{-3}{2}}-2\cdot 3x^{-3}-(-3)\frac{1}{5}x^{-4}=\frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}+\frac{1}{\sqrt{x^3}}-\frac{6}{x^3}+\frac{3}{5x^4}$$

4^0

$$y=\frac{x^2-x+1}{x^2+1}$$

$$y'=\frac{(2x-1)(x^2+1)-\left(x^2-x+1\right)2x}{\left(x^2+1\right)^2}=$$

$$=\frac{2x^3+2x-x^2-1-2x^3+2x^2-2x}{\left(x^2+1\right)^2}=$$

$$=\frac{x^2-1}{\left(x^2+1\right)^2}$$

5^0

$$y=x-\sin x\cos x$$

$$y'=1-\left(\sin x\cos x\right)'=1-\left(\cos x\cdot\cos x+\sin x(-\sin x)\right)=$$

$$=1-\left(\cos^2 x-\sin^2 x\right)=1-\cos^2 x+\sin^2 x=$$

$$=\sin^2 x+\sin^2 x=2\sin^2 x$$

6^0

$$y=\frac{\ln x}{1-\ln x}$$

$$y'=\frac{\frac{1}{x}\left(1-\ln x\right)-\ln x\cdot\frac{-1}{x}}{\left(1-\ln x\right)^2}=\frac{\frac{1}{x}\left(1-\ln x+\ln x\right)}{\left(1-\ln x\right)^2}=\frac{1}{x\left(1-\ln x\right)^2}$$

7^0

Ако је $f(x)=\dfrac{e^x+1}{e^x-1}$, израчунати $f'(-1)$.

$$f'(x)=\frac{e^x\left(e^x-1\right)-\left(e^x+1\right)e^x}{\left(e^x-1\right)^2}=\frac{e^x\left(e^x-1-e^x-1\right)}{\left(e^x-1\right)^2}=-\frac{2e^x}{\left(e^x-1\right)^2}$$

$$f'(-1)=-\frac{2e^{-1}}{\left(e^{-1}-1\right)^2}=-\frac{\frac{2}{e}}{\left(\frac{1}{e}-1\right)^2}=-\frac{\frac{2}{e}}{\left(\frac{1-e}{e}\right)^2}=-\frac{\frac{2}{e}}{\frac{(1-e)^2}{e^2}}=-\frac{2e}{(1-e)^2}$$

Већ смо спомињали да изводи имају велики значај при израчунавању тангенте криве , односно изводи нам омогућавају да израчунамо једначину тангенте криве у различитим случајевима што ћемо и показати на следећим примјерима.

Примјер 1

Одредити једначину тангенте на графику дате функције у датој тачки која припада графику

$y=2x^2-3x+2$ у тачки $A(2,y)$;

$y = 2 \cdot 2^2 - 3 \cdot 2 + 2$
$y = 2 \cdot 4 - 6 + 2$
$y = 8 - 4$
$y = 4$

$k = tg\varphi = f'(x_0)$
$y' = 4x - 3$
$y'(2) = 4 \cdot 2 - 3 = 5$
$\Rightarrow k = 5$

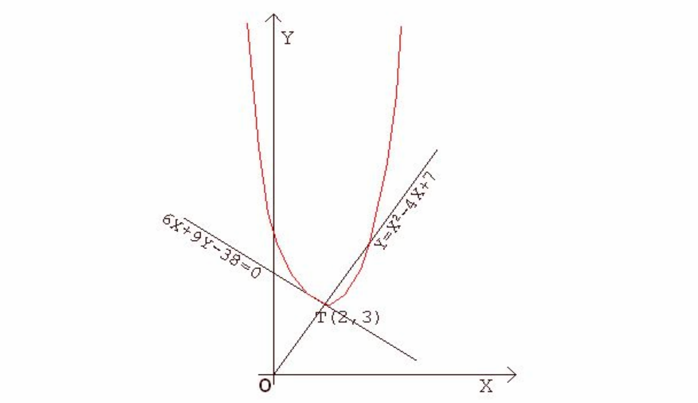
$y - y_1 = k(x - x_1)$
$y - 4 = 5(x - 2)$
$y - 4 = 5x - 10$
$y = 5x - 6$

Значи једначина тангенте криве је $y = 5x - 6$

Примјер 2

Одредити једначину тангенте, параболе $y = x^2 - 4 + 7$, која је нормална на праву одређену координатним почетком и тјеменом дате параболе.
Наиме, прво ћемо израчунати тјеме ове криве на следећи начин:

$$T\left(-\frac{b}{2a}, \frac{4ac - b^2}{4a}\right) \Rightarrow T\left(-\frac{-4}{2 \cdot 1}, \frac{4 \cdot 1 \cdot 7 - (-4)^2}{4 \cdot 1}\right) \Rightarrow T\left(\frac{4}{2}, \frac{28 - 16}{4}\right) \Rightarrow$$
$T(2,3)$



На основу претходног закључујемо да тјеме параболе јесте у тачки са координатама (2, 3) и то претставља минимум ове криве јер је $a > 0$.
Коефицијент тангнте ћемо добити на следећи начин:

$$y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1)$$
$$y - 0 = \frac{3 - 0}{2 - 0}(x - 0)$$
$$y = \frac{3}{2}x \Rightarrow k = \frac{3}{2}$$

где је k коефицијент нормале, а коефицијент тнгенте параболе k_1 ћемо добити из следеће формуле

$$k_1 = -\frac{1}{k} \Rightarrow k_1 = -\frac{1}{\frac{3}{2}} \Rightarrow k_1 = -\frac{2}{3}$$

Знамо да је k једнак изводу функције у датој тачки па на основу тога имамо

$$k_1 = y'(x_0) = 2x_0 - 4$$
$$2x_0 - 4 = -\frac{2}{3}$$
$$6x_0 - 12 = -2$$
$$x_0 = \frac{10}{6} = \frac{5}{3}$$

а онда уврштавамо у почетну функцију

$$y_0 = \left(\frac{5}{3}\right)^2 - 4\cdot\frac{5}{3} + 7$$
$$y_0 = \frac{25}{9} - \frac{20}{3} + 7$$
$$y_0 = \frac{25 - 60 + 63}{9}$$
$$y_0 = \frac{28}{9}$$

Тачка коју смо добили $\left(\frac{5}{3}, \frac{28}{9}\right)$ јесте заједничка тачка параболе и тангенте, те на основу свега претхоног добијамо једначину тангете

$$y - \frac{28}{9} = -\frac{2}{3}\left(x - \frac{5}{3}\right)$$
$$y = -\frac{2}{3}x + \frac{10}{9} + \frac{28}{9}$$
$$y = -\frac{2}{3}x + \frac{38}{9} \quad \Leftrightarrow \quad 9y = -6x + 38 \quad \Leftrightarrow \quad 6x + 9y - 38 = 0$$

Лијеви и десни извод

Као и код граничних вриједности и непрекидности, тако и код извода имамо појам лијевог и десног извода.

Лијевим изводом функције f у тачки x_0 назива се лијева гранична вриједност дата релацијом $\lim\limits_{\Delta x0\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x0\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x_0) - f(x_0)}{\Delta x_0} = f'(x_0)$, уколико она постоји. Прецизније, ако се са $f_-^{'}(x_0)$ означи лијеви извод у тачки x_0, биће:

$$f_-^{'}(x_0) = \lim_{\Delta x\to 0-}\frac{\Delta y}{\Delta x}$$

На сличан начин се дефинише и десни извод функције тј.

Десним изводом функције f у тачки x_0 назива се десна гранична вриједност дата релацијом $\lim\limits_{\Delta x0\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x0\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x_0) - f(x_0)}{\Delta x_0} = f'(x_0)$, уколико она постоји. Тако, ако се са $f_+^{'}(x_0)$ означи десни извод у тачки x_0, слиједи:

$$f_+^{'}(x_0) = \lim_{\Delta x\to 0+}\frac{\Delta y}{\Delta x}$$

Примјер

Одредити лијеви и десни извод функције $f(x)=|x|$ у тачки $x=0$.

Како је , према дефиницији апсолутне вриједности,

$$f(x)=|x|=\begin{cases} x, x\geq 0 \\ -x, x<0 \end{cases}$$

за тачку $x=0$ вриједиће следеће:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{|0+\Delta x|-|0|}{\Delta x}=\frac{|\Delta x|}{\Delta x}=\begin{cases} 1, \Delta x\geq 0 \\ -1, \Delta x<0 \end{cases}$$

тако да је

$$f_{-}^{'}(0)=-1,\ \text{а}\quad f_{+}^{'}(0)=1.$$

Лијеви и десни извод у тачки 0 су различити, па сходно одговарајућем тврђењу за лијеву и десну граничну вриједност, закључујемо да $f'(0)$ не постоји.

Теорема

Потребан и довољан услов да функција f има извод у тачки x јесте да постоје лијеви и десни извод функције у истој тачки и да су међусобно једнаки

Извод сложене функције

Изводе сложених или посредних функција као што су нпр. $y=\ln(3x^2-1)$, $y=tg\dfrac{x+1}{x-1}$, $y=\sqrt{x^3+1}$ и сл. израчунавамо на основу следеће теореме:

Теорема

Ако функција u има извод у фиксираној тачки x, а функција $y=f(x)$ има извод у тачки $u=u(x)$, тада и функција $y=f(u(x))$ има извод у тачки x и при том важи формула $y'=f'(u)\cdot u'(x)$

Доказ

Са Δu означимо прираштај који одговара прираштају Δx у тачки x, тј. $\Delta u=u(x+\Delta x)-u(x)$, а са Δy прираштај функције $y=f(u(x))$ који одговара прираштају Δx. Ако постоји околина тачке x у којој је $\Delta u\neq 0$ тада је:

$$y=\frac{\Delta y}{\Delta x}$$

$$\begin{aligned} y'&=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} \\ &=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(u(x+\Delta x))-f(u(x))}{\Delta x} \\ &=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(u+\Delta u)-f(u)}{u(x+\Delta x)-u(x)}\cdot\frac{u(x+\Delta x)-u(x)}{\Delta x} \\ &=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(u+\Delta u)-f(u)}{\Delta u}\cdot\lim_{\Delta x\to 0}\frac{u(x+\Delta x)-u(x)}{\Delta x} \\ &=f'(u)\cdot u'(x) \end{aligned}$$

јер $\Delta u \to 0$ када $\Delta x \to 0$, што слиједи из непрекидности функције u у тачки x. Ако је $\Delta u = 0$ на бесконачно много мијеста, произвољно близу тачки x, тада је $\Delta y = f(u(x+\Delta x)) - f(u(x)) = f(u+\Delta u) - f(u) = 0$ на бесконачно много мијеста произвољно близу тачки x, тј. и однос $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ би био једнак нули на беконачно много мијеста, произвољно близу тачки x, па је $y'(x) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x} = 0$. Дакле формула $y' = f'(u) \cdot u'(x)$ важи и овом случају и она се често пише у облику

$$y_x' = f_u' \cdot u_x'$$

Међутим, у случају неких више сложенијих функција, као нпр. $y = f(g(u(x)))$ имаћемо сличну формулу:

$$y_x' = f_g' \cdot g_u' \cdot u_x' \quad \text{итд.}$$

Тако да ће на основу претходног таблични изводи постати:

1. $\left(u^n\right)' = nu^{n-1} \cdot u'$
2. $(u)' = \dfrac{1}{2\sqrt{u}} \cdot u'$
3. $(\sin u)' = \cos u \cdot u'$
4. $(\cos u)' = -\sin u \cdot u'$
5. $(tgu)' = \dfrac{1}{\cos^2 u} \cdot u'$
6. $(ctgu)' = -\dfrac{1}{\sin^2 u} \cdot u'$
7. $\left(a^u\right)' = a^u \ln a \cdot u'$
8. $\left(e^u\right)' = e^u \cdot u'$
9. $(\log_a u)' = \dfrac{\log_a e}{u} \cdot u'$
10. $(\ln u)' = \dfrac{1}{u} \cdot u'$
11. $(\arcsin u)' = \dfrac{1}{\sqrt{1-u^2}} \cdot u'$
12. $(\arccos u)' = -\dfrac{1}{\sqrt{1-u^2}} \cdot u'$
13. $(arctgu)' = \dfrac{1}{1+u^2} \cdot u'$
14. $(arcctgu)' = -\dfrac{1}{1+u^2} \cdot u'$

Примјер 1

Одредити први извод функције $y = \dfrac{1}{2} tg^2 x + \ln \cos x$

$$y' = \frac{1}{2} \cdot 2tgx \cdot (tgx)' + \frac{1}{\cos x}(\cos x)'$$

$$= \frac{\sin x}{\cos x} \cdot \frac{1}{\cos^2 x} + \frac{-\sin x}{\cos x} = \frac{\sin x - \sin x \cdot \cos^2 x}{\cos^3 x} =$$

$$= \frac{\sin x(1-\cos^2 x)}{\cos^3 x} = \frac{\sin x \cdot \sin^2 x}{\cos^3 x} = \frac{\sin^3 x}{\cos^3 x} = tg^3 x$$

Примјер 2

Доказати да извод следеће функције не зависи од x:
$y = 2(\sin^6 x + \cos^6 x) - 3(\sin^4 x + \cos^4 x)$

$$y' = 2(6\sin^5 x \cdot \cos x - 6\cos^5 x \cdot \sin x) - 3(4\sin^3 x \cdot \cos x - 4\cos^3 x \cdot \sin x) =$$
$$= 12\sin^5 x \cdot \cos x - 12\cos^5 x \cdot \sin x - 12\sin^3 x \cdot \cos x + 12\cos^3 x \cdot \sin x =$$
$$= 12\sin^3 x \cdot \cos x(\sin^2 x - 1) - 12\cos^3 x \cdot \sin x(\cos^2 x - 1) =$$
$$= -12\sin^3 x \cdot \cos x(1 - \sin^2 x) + 12\cos^3 x \cdot \sin x(1 - \cos^2 x) =$$
$$= -12\sin^3 x \cdot \cos x \cdot \cos^2 x + 12\cos^3 x \cdot \sin x \cdot \sin^2 x =$$
$$= -12\sin^3 x \cdot \cos^3 x + 12\cos^3 x \cdot \sin^3 x = 0$$

Примјер 3

Одредити први извод функције $y = arctge^x - \ln\sqrt{\frac{e^{2x}}{e^{2x}+1}}$

$$y' = \frac{1}{1+(e^x)^2} \cdot (e^x)' - \frac{1}{\sqrt{\frac{e^{2x}}{e^{2x}+1}}} \cdot \left(\sqrt{\frac{e^{2x}}{e^{2x}+1}}\right)' =$$
$$= \frac{e^x}{1+e^{2x}} - \frac{\sqrt{e^{2x}+1}}{\sqrt{e^{2x}}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{\frac{e^{2x}}{e^{2x}+1}}} \cdot \left(\frac{e^{2x}}{e^{2x}+1}\right)' =$$
$$= \frac{e^x}{1+e^{2x}} - \frac{\sqrt{e^{2x}+1}}{\sqrt{e^{2x}}} \cdot \frac{\sqrt{e^{2x}+1}}{2\sqrt{e^{2x}}} \cdot \frac{2e^{2x}(e^{2x}+1) - e^{2x} \cdot 2e^{2x}}{(e^{2x}+1)^2} =$$
$$= \frac{e^x}{1+e^{2x}} - \frac{2e^{4x} + 2e^{2x} - 2e^{4x}}{2e^{2x}(e^{2x}+1)} = \frac{e^x}{1+e^{2x}} - \frac{2e^{2x}}{2e^{2x}(e^{2x}+1)} =$$
$$= \frac{e^x - 1}{e^{2x}+1}$$

Примјер 4

Одредити први извод сложене функције $y = \ln\left(\sin x + \sqrt{1+\sin^2 x}\right)$.

$$y' = \frac{1}{\sin x + \sqrt{1+\sin^2 x}} \cdot \left(\sin x + \sqrt{1+\sin^2 x}\right)' =$$

$$= \frac{1}{\sin x + \sqrt{1+\sin^2 x}} \cdot \left(\cos x + \frac{1}{2\sqrt{1+\sin^2 x}} \cdot \left(1+\sin^2 x\right)'\right) =$$

$$= \frac{1}{\sin x + \sqrt{1+\sin^2 x}} \cdot \left(\cos x + \frac{1}{2\sqrt{1+\sin^2 x}} \cdot 2\sin x \cdot \cos x\right) =$$

$$= \frac{1}{\sin x + \sqrt{1+\sin^2 x}} \cdot \frac{\cos x \cdot \sqrt{1+\sin^2 x} + \sin x \cdot \cos x}{\sqrt{1+\sin^2 x}} =$$

$$= \frac{1}{\sin x + \sqrt{1+\sin^2 x}} \cdot \frac{\cos x\left(\sqrt{1+\sin^2 x} + \sin x\right)}{\sqrt{1+\sin^2 x}} =$$

$$= \frac{\cos x}{\sqrt{1+\sin^2 x}}$$

Извод инверзне функције

Нека за функцију $y = f(x)$ постоји инверзна функција $x = f^{-1}(y)$ у околини фиксиране тачке x_0 . Ако постоји извод функције $y = f(x)$ у таквој тачки x_0 и при том је $f'(x_0) \neq 0$, тада постоји и извод инверзне функције $x = f^{-1}(y)$ у тачки $y_0 = f(x_0)$ и једнак је $\frac{1}{f'(x_0)}$.

На основу ове теореме можемо да нађемо изводе функција које су инверзне неким функцијама, чији су нам изводи познати.

Доказ

Имајући у виду да $\Delta x \to 0 \Leftrightarrow \Delta y \to 0$ можемо да напишемо:

$$x'(y_0) = (f^{-1})'(y_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f^{-1}(y_0 + \Delta y) - f^{-1}(y_0)}{\Delta y}$$

$$= \lim_{y \to y_0} \frac{f^{-1}(y) - f^{-1}(y_0)}{y - y_0} = \lim_{x \to x_0} \frac{x - x_0}{f(x) - f(x_0)} =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{1}{\frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}} = \frac{1}{f'(x_0)},$$

тј.

$$(f^{-1})'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)}$$

Примјер

Одредити изводе следећеих функција

а) $y = \arcsin x$ б) $y = \arccos x$ в) $y = arctgx$ г) $y = arcctgx$

а) Како је $y = \arcsin x \Leftrightarrow \begin{pmatrix} -\frac{\pi}{2} \le y \le \frac{\pi}{2}, \sin y = x \\ -1 \le x \le 1 \end{pmatrix}$ биће:

$$y' = \frac{1}{(\sin y)'} = \frac{1}{\cos y} = \frac{1}{\sqrt{1-\sin^2 y}} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$ према томе је

$$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

б) На сличан начин као под а) се добија извод функције $y = \arccos x$ па ће бити

$$(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

в) $y = arctgx$

Из дефиниције имамо да је $-\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2}$ и $tgy = x$, због тога је

$$y' = \frac{1}{(tg)'} = \frac{1}{\frac{1}{\cos^2 y}} = \cos^2 y = \frac{\cos^2 y}{\sin^2 y + \cos^2 y} / \frac{\cos^2 y}{\cos^2 y} = \frac{1}{1 + tg^2 y} = \frac{1}{1+x^2}$$ дакле

$$\boxed{(arctgx)' = \frac{1}{1+x^2}}$$

г) Сличним поступком као по в) добићемо извод функције $y = arcctgx$

$$\boxed{(arcctgx)' = -\frac{1}{1+x^2}}$$

Таблица неких извода

1^0	$y = C(const.)$	$y' = 0$
2^0	$y = x$	$y' = 1$
3^0	$y = x^n$	$y' = nx^{n-1}$
4^0	$y = \sqrt{x}$	$y' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$
5^0	$y = \frac{1}{x}$	$y' = -\frac{1}{x^2}$
6^0	$y = a^x$	$y' = a^x \ln a$
7^0	$y = e^x$	$y' = e^x$
8^0	$y = \log_a x$	$y' = \frac{1}{x \ln a}$

$9^0 \quad y=\ln x \qquad y'=\frac{1}{x}$

$10^0 \quad y=\sin x \qquad y'=\cos x$

$11^0 \quad y=\cos x \qquad y'=-\sin x$

$12^0 \quad y=tgx \qquad y'=\frac{1}{\cos^2 x}$

$13^0 \quad y=ctgx \qquad y'=-\frac{1}{\sin^2 x}$

$14^0 \quad y=\arcsin x \qquad y'=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

$15^0 \quad y=\arccos x \qquad y'=-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

$16^0 \quad y=arctgx \qquad y'=\frac{1}{1+x^2}$

$17^0 \quad y=arcctgx \qquad y'=-\frac{1}{1+x^2}$

Ове вриједности извода које смо добили користићемо као табличне изводе при израчунавању сложенијих функција.

Примјери сложене инверзне функције:

Примјер 1

Одредити први извод сложене функције $y=\arcsin\frac{x^2-a^2}{x^2+a^2}$

$$y'=\frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{x^2-a^2}{x^2+a^2}\right)^2}}\cdot\left(\frac{x^2-a^2}{x^2+a^2}\right)'=\frac{1}{\sqrt{\frac{\left(x^2+a^2\right)^2-\left(x^2-a^2\right)^2}{\left(x^2+a^2\right)^2}}}\cdot\frac{2x\left(x^2+a^2\right)-\left(x^2-a^2\right)2x}{\left(x^2+a^2\right)^2}=$$

$$=\frac{x^2+a^2}{\sqrt{x^4+2x^2a^2+a^4-x^4+2x^2a^2-a^4}}\cdot\frac{2x^3+2xa^2-2x^3+2xa^2}{\left(x^2+a^2\right)^2}=$$

$$=\frac{4xa^2}{\sqrt{4x^2a^2}\cdot\left(x^2+a^2\right)}=\frac{4xa^2}{2xa\cdot\left(x^2+a^2\right)}=\frac{2a}{x^2+a^2}$$

Примјер 2

Наћи први извод функције $y=\frac{1}{6}\ln\frac{(x-1)^2}{x^2+x+1}-\frac{1}{\sqrt{3}}arctg\frac{2x+1}{\sqrt{3}}$

$$y' = \frac{1}{6}\cdot\frac{1}{\frac{(x-1)^2}{x^2+x+1}}\cdot\left(\frac{(x-1)^2}{x^2+x+1}\right)' - \frac{1}{\sqrt{3}}\cdot\frac{1}{1+\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right)^2}\cdot\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right)'$$

$$= \frac{1}{6}\cdot\frac{x^2+x+1}{(x-1)^2}\cdot\frac{(2x-2)(x^2+x+1)-(x^2-2x+1)(2x+1)}{(x^2+x+1)^2} - \frac{1}{\sqrt{3}}\cdot\frac{1}{\frac{3+4x^2+4x+1}{3}}\cdot\frac{2\sqrt{3}}{3} =$$

$$= \frac{1}{6}\cdot\frac{2x^3+2x^2+2x-2x^2-2x-2-2x^3-x^2+4x^2+2x-2x-1}{(x-1)^2(x^2+x+1)} - \frac{2}{4(x^2+x+1)} =$$

$$= \frac{3x^2-3}{6(x-1)^2(x^2+x+1)} - \frac{1}{2(x^2+x+1)} = \frac{x^2-1-x^2+2x-1}{2(x-1)^2(x^2+x+1)} =$$

$$= \frac{2(x-1)}{2(x-1)^2(x^2+x+1)} = \frac{1}{x^3-1}$$

Други извод. Изводи вишег реда.

Нека функција f има извод $f'(x)$ за свако $x \in (a,b)$. Извод f' је сада функција од x, па можемо тражити извод функције f'. Извод од извода функције назива се ***другим изводом*** функције и означава се са f''. Према томе, по дефиницији ће бити:

$$f''(x) = \left[f'(x)\right]'$$

Примјер

Одредити други извод функција:

а) $y = \sqrt{1+x^2}$

$$y' = \frac{1}{2\left(\sqrt{1+x^2}\right)}\left(1+x^2\right)' = \frac{1}{2\left(\sqrt{1+x^2}\right)}\cdot 2x = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$$

$$y'' = \frac{1\cdot\sqrt{1+x^2} - x\cdot\frac{2x}{2\sqrt{1+x^2}}}{\left(\sqrt{1+x^2}\right)^2} = \frac{\sqrt{1+x^2}-\frac{x^2}{\sqrt{1+x^2}}}{\left(\sqrt{1+x^2}\right)^2} = \frac{\frac{1+x^2-x^2}{\sqrt{1+x^2}}}{\left(\sqrt{1+x^2}\right)^2} = \frac{1}{\left(\sqrt{1+x^2}\right)^3}$$

б) $y = \ln\sin x$

$$y' = \frac{1}{\sin x}(\sin x)' = \frac{1}{\sin x}\cdot\cos x = \frac{\cos x}{\sin x}$$

$$y'' = \frac{-\sin x\cdot\sin x - \cos x\cdot\cos x}{\sin^2 x} = \frac{-\sin^2 x - \cos^2 x}{\sin^2 x} = \frac{-\left(\sin^2 x+\cos^2 x\right)}{\sin^2 x} = -\frac{1}{\sin^2 x}$$

По аналогији са другим изводом може се дефинисати и извод трећег, четвртог, петог,..., n-тог реда. Тачније, n-тим изводом функције f називамо извод извода $(n-1)$-ог реда функције f. Извод n-тог реда обиљежава се са $y^{(n)}$ или $f^{(n)}(x)$. Дакле, према дефиницији слиједи да је $y^{(n)} = (y^{n-1})'$ или $f^{(n)}(x) = (f^{(n-1)} + (x))'$.

Примјер 1

Одредити трећи извод функција:

а) $y = x^2 \ln x$

$$y' = 2x \cdot \ln x + x^2 \cdot \frac{1}{x} = 2x \ln x + x$$

$$y'' = 2 \cdot \ln x + 2x \cdot \frac{1}{x} + 1 = 2\ln x + 2 + 1$$

$$y''' = 2 \cdot \frac{1}{x} = \frac{2}{x}$$

б) $y = \cos^2 x$

$$y' = 2\cos x \cdot (-\sin x) = -\sin 2x$$

$$y'' = -\cos 2x \cdot (2x)' = -2\cos 2x$$

$$y''' = -2(-\sin 2x)(2x)' = 4\sin 2x$$

Примјер 2

Одредити n-ти извод функција:

а) $y = \sin x$

$$y' = \cos x = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$$

$$y'' = -\sin x = \sin\left(x + 2\frac{\pi}{2}\right)$$

$$y''' = -\cos x = \sin\left(x + 3\frac{\pi}{2}\right)$$

$$y'''' = \sin x = \sin\left(x + 4\frac{\pi}{2}\right)$$

....

$$y^{(n)} = \sin\left(x + n\frac{\pi}{2}\right)$$

b) $y = e^{-2x}$

$$y' = e^{-2x}(-2x)' = -2e^{-2x}$$

$$y'' = -2e^{-2x}(-2x)' = 4e^{-2x} = (-2)^2 e^{-2x}$$

$$y''' = 4e^{-2x}(-2x)' = -8e^{-2x} = (-2)^3 e^{-2x}$$

$$y'''' = -8e^{-2x}(-2x)' = 16e^{-2x} = (-2)^4 e^{-2x}$$

....

$$y^{(n)} = (-2)^n e^{-2x}$$

Имплицитне функције

Нека је функција $y(x)$ дефинисана имплицитно једначином

$$F(x, y) = 0,$$

Што значи да је

$$F(x, y(x)) = 0$$

За свако $x \in (a, b)$, гдје је (a, b) интервал у коме је функција $y(x)$ дефинисана и диференцијабилна. Примјењујући правило диференцирања сложене функције на релацију $F(x, y(x)) = 0$, сматрајући да непосредно зависи од x и посредно преко y, диференцирањем по x добијамо релацију

$$[F(x, y(x))]'_x = \Phi(x, y, y') = 0$$

Линеарну у односу на y', из које се добија

$$y' = \varphi(x, y).$$

Примјер

Одредити изводе имплицитних функција дефинисаних једначинама:

а) $x^2 + y^2 = r^2$ (кружница) $\Leftrightarrow$ $y = \sqrt{r^2 - x^2}$ а извод ове функције ће бити исти:

Извод је:

$$2x + 2yy' = 0$$

$$y' = -\frac{2x}{2y}$$

$$y' = -\frac{x}{y} = -\frac{x}{\sqrt{r^2 - x^2}}$$

$$y' = \frac{1}{2\sqrt{r^2 - x^2}}(-2x)$$

$$y' = -\frac{x}{\sqrt{r^2 - x^2}}$$

б) $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$ $\Rightarrow$ $y = \sqrt{\dfrac{a^2b^2 - b^2x^2}{a^2}}$

$$2b^2x + 2a^2yy' = 0 \,/ : 2$$

$$y' = -\frac{b^2x}{a^2y}$$

$$y' = -\frac{b^2x}{a^2 \cdot \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}}$$

$$y' = -\frac{bx}{a\sqrt{a^2 - x^2}}$$

Дата је функција $x \to y = \frac{1}{2}\left(x + \sqrt{1 - x^2}\right)e^{\arcsin x}$.

Ријешити једначину $2y - y'x = xe^{\arcsin x}$ по x.

$$y'=\frac{1}{2}\left[\left(x+\sqrt{1-x^2}\right)'\cdot e^{\arcsin x}+\left(x+\sqrt{1-x^2}\right)\cdot\left(e^{\arcsin x}\right)'\right]$$

$$y'=\frac{1}{2}\left[\left(1+\frac{1}{2\sqrt{1-x^2}}\cdot(-2x)\right)\cdot e^{\arcsin x}+\left(x+\sqrt{1-x^2}\right)\cdot e^{\arcsin x}\cdot\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\right]$$

$$y'=\frac{1}{2}\left[\frac{\sqrt{1-x^2}-x}{\sqrt{1-x^2}}\cdot e^{\arcsin x}+e^{\arcsin x}\cdot\frac{x+\sqrt{1-x^2}}{\sqrt{1-x^2}}\right]$$

$$y'=\frac{1}{2}\left[e^{\arcsin x}\left(\frac{\sqrt{1-x^2}-x}{\sqrt{1-x^2}}+\frac{x+\sqrt{1-x^2}}{\sqrt{1-x^2}}\right)\right]$$

$$y'=\frac{1}{2}\cdot e^{\arcsin x}\cdot\frac{\sqrt{1-x^2}-x+x+\sqrt{1-x^2}}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$y'=\frac{1}{2}\cdot e^{\arcsin x}\cdot\frac{2\sqrt{1-x^2}}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$y'=e^{\arcsin x}$$

а затим ћемо ову вриједност извода функције уврстити у дату једначину

$$2y-y'x=xe^{\arcsin x}$$

$$2y=xe^{\arcsin x}+xe^{\arcsin x}$$

$$2y=2xe^{\arcsin x}$$

а одавде ће x бити:

$x=\frac{y}{e^{\arcsin x}}$, а умјесто y ћемо писати $y=\frac{1}{2}\left(x+\sqrt{1-x^2}\right)e^{\arcsin x}$ па ће бити

$$x=\frac{\frac{1}{2}\left(x+\sqrt{1-x^2}\right)e^{\arcsin x}}{e^{\arcsin x}}$$

$$x=\frac{\left(x+\sqrt{1-x^2}\right)e^{\arcsin x}}{2e^{\arcsin x}}$$

$$x=\frac{x+\sqrt{1-x^2}}{2}\ /\cdot 2 \quad\Leftrightarrow\quad 2x=x+\sqrt{1-x^2}\quad\Leftrightarrow\quad x=\sqrt{1-x^2}\ /^2\quad\Leftrightarrow\quad x^2=1-x^2\quad\Leftrightarrow$$

$$2x^2=1\quad\Leftrightarrow\quad x^2=\pm\frac{1}{2}\quad\Leftrightarrow\quad x=\pm\frac{1}{\sqrt{2}}$$

Дата је функција $x\to f(x)=x^3+ax^2+bx-1$ (a,b реални бројеви).

а) Одредити реалне бројеве a и b ако је
$f(1)=-12$ и $f(-1)=4$.

б) За добијене вриједности a и b одредити $\lim\limits_{x\to 3}\frac{f'(x)}{x-3}$

в) Ријешити систем неједначина
$0<f'(x)<f''(x)$

а)

$f(1) = -12$

$1^3 + a \cdot 1^2 + b \cdot 1 - 1 = -12$

$1 + a + b - 1 = -12$

$a + b = -12$

$f(-1) = 4$

$(-1)^3 + a(-1)^2 + b(-1) - 1 = 4$

$-1 + a - b - 1 = 4$

$a - b = 6$

на основу ове две једначине добићемо вријености a и b тј.

$a + b = -12$

$a - b = 6$

сабраћемо ове двије и биће:

$2a = -6$

$a = -3$

а затим можемо да добијемо и b :

$b = -12 + 3$

$b = -9$

б) $f'(x) = 3x^2 + 2ax + b$, а за добијене вриједности a и b $f'(x) = 3x^2 - 6x - 9$

кад x тежи 3 $\Rightarrow$

$$\lim_{x \to 3} \frac{3x^2 - 6x - 9}{x - 3} = \lim_{x \to 3} \frac{3x^2 - 9x + 3x - 9}{x - 3} = \lim_{x \to 3} \frac{3x(x-3) + 3(x-3)}{x - 3} = \lim_{x \to 3} \frac{(x-3)(3x+3)}{x - 3}$$

$$\lim_{x \to 3}(3x + 3) = 3 \cdot 3 + 3 = 12$$

в) $f''(x) = 6x + 2a$

$$0 < 3x^2 + 2ax + b < 6x + 2a$$

$$0 < 3x^2 - 6x - 9 < 6x - 6$$

Први систем ће бити:

$$3x^2 - 6x - 9 > 0$$

$$3x^2 - 6x - 9 = 0$$

$$x_{1,2} = \frac{6 \pm \sqrt{(-6)^2 + 4 \cdot 3 \cdot 9}}{3 \cdot 2}$$

$$x_{1,2} = \frac{6 \pm \sqrt{36 + 108}}{6}$$

$$x_{1,2} = \frac{6 \pm \sqrt{144}}{6}$$

$$x_{1,2} = \frac{6 \pm 12}{6}$$

$$x_1 = -1, \quad x_2 = 3$$

А ријешење ове неједначине је $x \in (-\infty, -1) \cup (3, +\infty)$

А други систем :

$$3x^2 - 6x - 9 < 6x - 6$$

$$3x^2 - 12x - 3 = 0$$

$$x_{1,2} = \frac{12 \pm \sqrt{(-12)^2 + 4 \cdot 3 \cdot 3}}{2 \cdot 3}$$

$$x_{1,2} = \frac{12 \pm \sqrt{144 + 36}}{6}$$

$$x_{1,2} = \frac{12 \pm \sqrt{180}}{6}$$

$$x_{1,2} = \frac{12 \pm 6\sqrt{5}}{6}$$

$$x_1 = 2 - \sqrt{5}, \qquad x_2 = 2 + \sqrt{5}$$

Риjешење овог система je $x \in \left(2 - \sqrt{5}, 2 + \sqrt{5}\right)$

А пресjек ова два система биће следеће риjешење: $x \in \left(3, 2 + \sqrt{5}\right)$