Статистика полагања тестова

Проблем:

У скупу од M = 240 питања ученик зна тачан одговор на A = 168 питања (a% = 70%). На тесту ученик добија N = 20 случајно изабраних питања датог скупа.

1. Колика је вјероватноћа (a) да ученик зна одговор на случајно изабрано питање.
2. Наћи вјероватноће (b) да ученик на тесту одговори тачно на k питања, ако је:
   i. $k = 18$;
   ii. $k \geq 18$.
3. Дефинисати вјероватноће да ученик на r-том тесту (r = 1, 2, 3, ...) постигне бар k = 18 тачних одговора.
4. Колико је минимално потребно предзнање ученика (A) да би се са шансом бар 50% могао очекивати успјех ученика у r-том (r = 4) тесту.

Рјешење:

1. Вјероватноћа да ученик из скупа од M = 240 питања на случајан начин добије једно од A = 168 питања на која зна одговор је $a = A/M = 0{,}7$. У истом тесту датих N = 20 питања су независни догађаји, једнаке вјероватноће.

2. Начина да се на 20 позиција (редни бројеви) питања теста распореди 18 на које знам одговор је $\binom{20}{18} = 190$. Вјероватноћа сваког тачног одговора је $a = 0{,}7$ а нетачног $\bar{a} = 1 - a = 0{,}3$. Питања су случајни независни догађаји, па је расподјела Бинарна.

(i) $b_{k=18} = \binom{n}{k} \cdot a^k \cdot (1-a)^{n-k} = 190 \cdot 0{,}7^{18} \cdot 0{,}3^2 = 0{,}0278458725$;

(ii) $b_{k\geq 18} = \sum_{k=18}^{n} \binom{n}{k} \cdot a^k \cdot (1-a)^{n-k} = 190 \cdot 0{,}7^{18} \cdot 0{,}3^2 + 20 \cdot 0{,}7^{19} \cdot 0{,}3^1 + 0{,}7^{20} = 0{,}0278458725 + 0{,}0068393371 + 0{,}0007979227 = 0{,}0354831323$.

Прва напомена: Када би ученик знао најмање 200 датих (240) питања, тада би са вјероватноћом не мањом од $a = 0{,}86857$ одговарао тачно на (20) питања теста и имао шансу (већу од 50%) да на једном тесту има бар 18 тачних одговора.

Друга напомена: Из комбинаторике знамо да је $\binom{n}{k} = \frac{n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot (n-k+1)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot k}$, а (i) је биномна расподјела. Њихове ексцелове функције су: „COMBIN(n; k)“ и „BINOM.DIST(k; n; a; False)“, али су овдје дате вриједности још тачније!

Трећа напомена: Примјетимо да је вјероватноћа да ученик тачно одговори на ниједно, једно, два, ..., или на сва питања теста $b_{k>0} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k (1-a)^{n-k} = (a+(1-a))^n = 1$, односно да је то сигуран догађај.

3. Вјероватноћа да ученик положи тест са 18, 19, или 20 тачних одговора је b = 0,0354831323. Вјероватноћа да ученик на појединoм тесту има од 0 до 17 тачних одговора је $1 - b$ = 0,9645168677.

Нека је r = 1, 2, 3, … број тестова које ученик редом полаже закључно са првим позитивним тестом. Скуп свих могућих исхода је $\Omega = \{+, -+, --+, ---+, \dots\}$, а случајна промјенљива, иначе функција X која сваком исходу $\omega \in \Omega$ додјељује реалан број, овдје је $X(\omega) = r$. На примјер $X\{---+\} = 4$.

Умјесто Ω одмах уочимо скуп свих могућих вриједности за $X : R_x = \{1, 2, 3, \dots\}$. Догађај $\{X = r\}$ реализује се ако и само ако је првих $r - 1$ тестова негативно, а r-ти тест позитиван. Када су тестови независни резултати (– или +) у различитим тестовима ћемо имати независне догађаје па је вјероватноћа $P\{X = r\} = p(r) = (1 - b)\cdot(1 - b)\cdot\ldots\cdot(1 - b)\cdot b = (1 - b)^{r-1} b$ = $0{,}9645168677^{r-1} \cdot 0{,}0354831323$.

Догађај да ученик постигне жељени резултат (бар 18 тачних одговора) на првом, другом, ..., или r-том тесту означимо са T_r. Овај догађај има вјероватноћу $P(T_r) = \sum_{k=1}^{r} p(k) = b\sum_{k=1}^{r}(1-b)^k$. На примјер:

r	$P\{X = r\}$	$P(T_r)$
1	0,03548	0,03548
2	0,03422	0,06970
3	0,03301	0,10271
4	0,03184	0,13455
5	0,03071	0,16526
6	0,02962	0,19488
7	0,02857	0,22345
8	0,02755	0,25100
9	0,02658	0,27758

Примјетимо да је за осредње (70%) знање потребно испуњавати много тестова за висок (90%) успјех. Овдје се не узима у обзир да ученик током неуспјешног полагања тестова учи. Друго, примјетимо да је $P(T_\infty) = \sum_{k=1}^{\infty} p(k) = b\sum_{k=1}^{\infty}(1-b)^k = 1$, што значи да ће ученик кад-тад постићи жељени резултат.

4. На примјер, када је A = 190, тада је ниво знања ученика (мало) већи од 79%, а вјероватноћа да ће ученик на (истом) тесту постићи 18, 19, или 20 тачних одговора је b = 0,181601717. Претходна табела сада је:

r	$P(X)$	$P(T)$
1	0,181601717	0,181601717
2	0,148622533	0,33022425
3	0,121632426	0,451856676
4	0,099543769	0,551400445
5	0,081466449	0,632866894
6	0,066672002	0,699538897
7	0,054564252	0,754103149
8	0,04465529	0,798758439
9	0,036545813	0,835304252