K R U Ž N A   L I N I J A

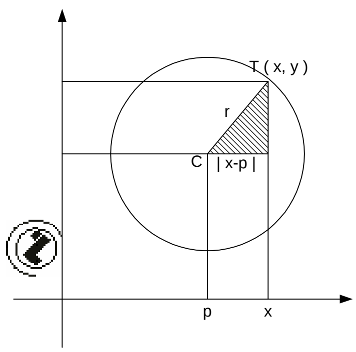
Sanela Džajić

1. JEDNAČINA KRUŽNE LINIJE

- Definicija :

Kružna linija je skup tačaka u ravni sa osobinom da su sve tačke tog skupa na jednakom rastojanju r od jedne stalne tačke te ravni C, koja se naziva centar (središte) kružne linije.

Udaljenost svake tačke kružne linije od njenog središta s jeste poluprečnik kružne linije r.



Slika 1.

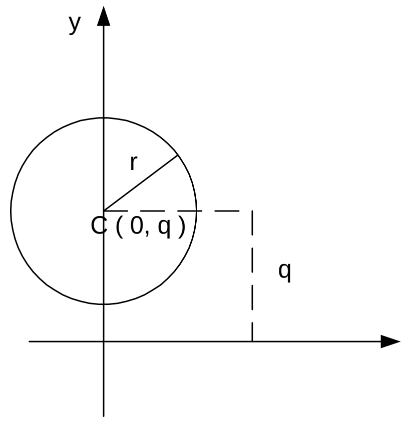
Neka je $O = xy$ koordinatni sisetm u ravni i neka je u tom sistemu data tačka $C(pq)$ i broj $r > o$. Neka $T(x, y)$ pripada kružnoj liniji. Tada je $|CT| = r$, pa prema Pitagorinoj teoremi slijedi :

$$(x - p)^2 + (y - q)^2 = r^2$$

Posebni slučajevi :

1) Ako je $p=0$, središte S leži na osi y :

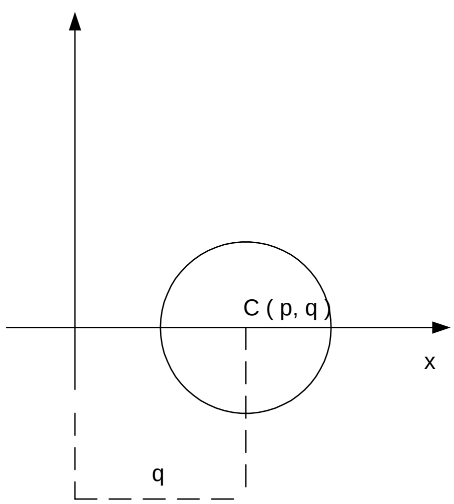
$$x^2+(y-q)^2=r^2$$



Slika 2.

2) Ako je $q=0$, središte S leži na osi x:

$$(x-p)^2+y^2=r^2$$



Slika 3.

3) Ako je $p=0$ i $q=0$, središte S pada u iskorište, pa se dobija centralna jednačina kružne linije:

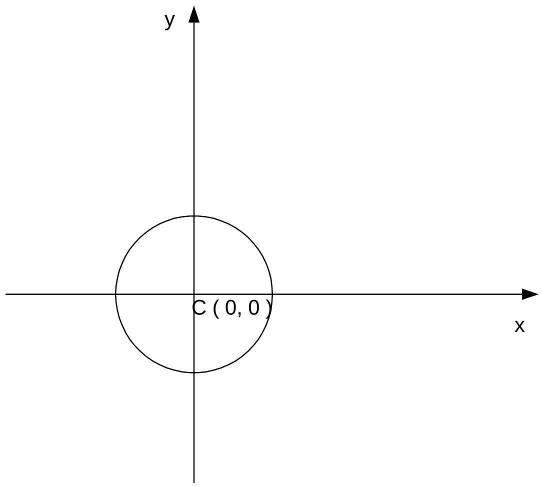
$$x^2+y^2=r^2$$

koja znači da je kvadrat udaljenosti svake tačke od iskorišta jednak r^2. Odatle se dobija eksplicitni oblik jednačine kružne linije:

$$y=\pm\sqrt{r^2-x^2}$$

Predznak + “ daje gornju, a predznak “ – “ donju polukružnicu. Poseban slučaj jednačina kružne linije kojoj je poluprečnik $r=1$:

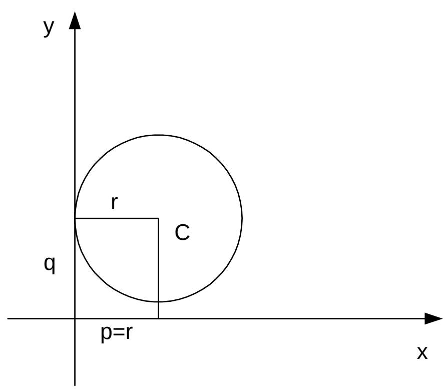
$$x^2+y^2=1 \Rightarrow y=\pm\sqrt{1-x^2}$$



Slika 4.

4) Ako je $p=\pm r$, kružna linija dira osu y :

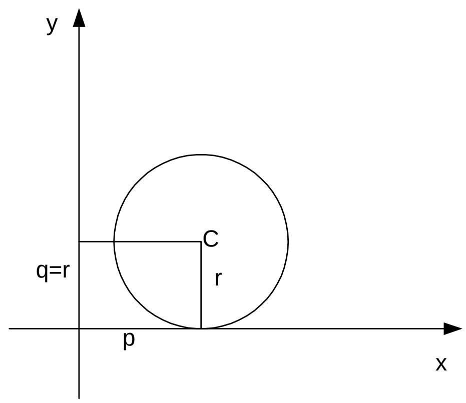
$$(x\mp r)^2+(y-q)^2=r^2$$



Slika 5.

5) Ako je $q = \pm r$ kružna linija dira osu x :

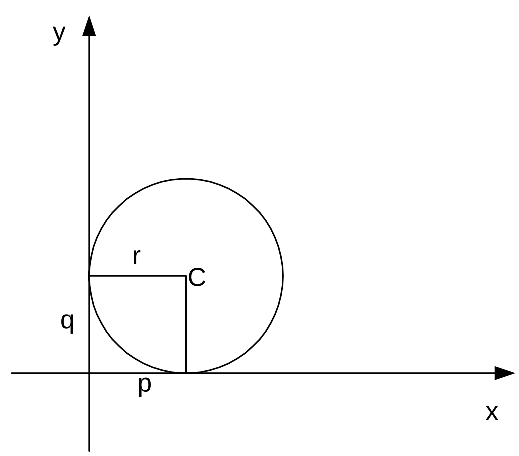
$$(x-p)^2 + (y \pm r)^2 = r^2$$



Slika 6.

6) Ako je $p = \pm r$ i $q = \pm r$ kružna linija dira obe koordinate ose :

$$(x \mp r)^2 + (y \mp r)^2 = r^2$$



Slika 7.

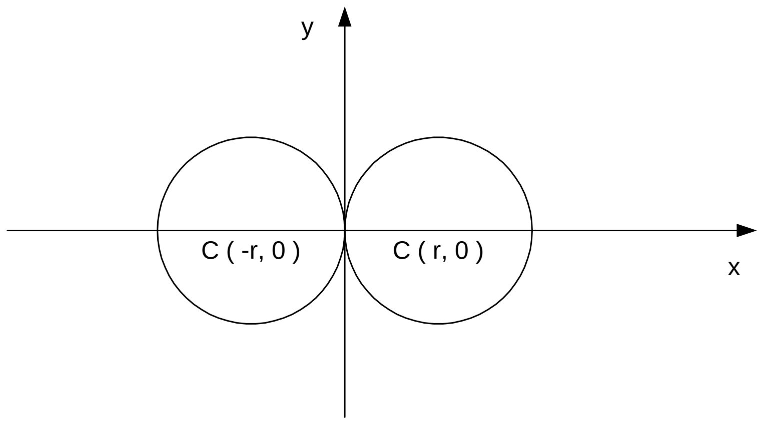
7) Ako je $p = r$ i $q = 0$, središte kružne linije leži na osi x, a kružna linija prolazi ishodištem :

$$(x-r)^2 + y^2 = r^2$$

ili

$$y^2 = 2rx - x^2$$

(desna kružna linija na slici 8.)



Slika 8.

8) Sličan slučaj dobija se ako je :

$p = r$ i $q = 0$

$(x - r)^2 + y^2 = r^2$, ili $y^2 = 2rx - x^2$

(lijeva kružna linija na slici 8.)

Neka je data kružna linija (1) i tačka $P(x_0, y_0)$. Ako je $(x_0 - p)^2 + (y_0 - q)^2 = r^2$,tada tačka P pripada liniji (1).

Ako je $(x_0 - p) + (y_o - q)^2 > r^2$, tada je rastojanje $|PC|$, gdje je $C = p, q$, centar kružne linije (1) veće od poluprečnika r, pa se tačka P nalazi izvan linije (1).

Ako je $(x_0 - p)^2 + (y_o - q)^2 < r^2$, tada je rastojanje $|PC|$ manje od poluprečnika r, pa se tačka P nalazi unutar linije (1).

Kao što znamo, svaka kružna linija u ravni ima jednačinu oblika (1) gdje je (p, q) njen centar, a $r > 0$ njen poluprečnik. Ta jednačina poslije sređivanja, postaje: $x^2 + y^2 = 2px - 2qy + p^2 + q^2 = r^2 = 0$ (2) i ona je specijalan slučaj sljedeće opšte jednačine drugog stepena:

$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0 \quad A, B, C, D, E, F, G, R$ (3)

Da bi jednačine (2) i (3) predstavljale istu krivu liniju, njihovi koficijentni moraju da budu proporcionalni, tj. mora biti: $B=0$,

$$\frac{A}{1}=\frac{C}{1}=\frac{D}{2p}=\frac{E}{2q}=\frac{F}{p^2+q^2-r^2}=\lambda\neq 0,$$

odakle se dobija $A=C=\lambda\neq 0$, pa (3) poslije djeljenja sa

A postaje: $x^2+\frac{D}{A}x+\frac{D}{4A^2}+y^2+\frac{E}{A}y+\frac{E^2}{4A^2}+\frac{F}{A}-\frac{D^2}{4A^2}-\frac{E^2}{4A^2}=0$

ili, $$\left(x+\frac{D}{2A}\right)^2+\left(y+\frac{E}{2A}\right)^2=\frac{D^2+E^2-4AF}{4A^2} \qquad (4)$$

Da bi jednačina (4) predstavljala kružnu liniju, broj na desnoj strani treba da bude pozitivan, tj. mora biti ispunjen uslov $D^2+E^2-4AF>0$.

Dakle jednačina (3) predstavlja kružnu liniju ako je :

$B=0, A=C\neq 0, D^2+E^2-4AF>0$.

NJen centar je $\left(\frac{D}{2A},\frac{E}{2A}\right)$, a poluprečnik $r=\frac{1}{2|A|}\sqrt{D^2+E^2=4AF}$

PRIMJER 1

Napisati jednačinu kružne linije koja prolazi kroz tačku $A(9,-5)$, a centar joj se nalazi u preseku pravih $2x+y-15=0$ i $x-3y+17=0$.

Rješavanjem sistema $2x+y-15=0$ dobijaju se koordinate centra C date kružne linije (4,7), a poluprečnik je $r=\sqrt{(9-4)^2+(5-7)^2}=B$. Tražena jednačina kružne linije je $(x-4)^2+(y-7)^2=169$

PRIMJER 2

Odredi jednačinu kružne linije koja sadrži tačke $A(-2,9)$, $B(-4,5)$, $C(5,8)$.

I način

Zamjenjujući koordinate tačaka A, B, C u opštu jednačinu (1), dobijamo $(-2-p)^2+(9-q)^2=r^2$, $(-4-p)^2+(5-q)^2=r^2$, $(5-p)^2+(8-q)^2=r^2$, tj. poslije sređivanja: $p^2+q^2+4p-18q+8r+r^2$, $p^2+q^2+8p-10q+41=r^2$, $p^2+q^2-10p-16q+8s=r^2$.

Ako treba jednačinu oduzmemo od druge, a zatim od treće jednačine, dobićemo sistem jednačina $7p-q=2, p+2q=11$.

Rješenjeovog sistema predstavlja koordinata centra kružne linije $C(p,q)=(1,5)$. Ako date vrijednosti p i q zamjenimo u bilo koju od tri polazne jednačine dobićemo vrijednost poluprečnika kružne linije $r^2=25$. Kad imamo sve neophodne podatke možemo napisati jednačinu kružne linije $(x-1)^2+(y-5)^2=25$.

II način

Centar kružne linije se dobija kao presječena tačka simetrale duž AB i BC. Sredina duži AB je $\frac{-2-4}{2}=-3$ i $\frac{9+5}{2}=7$, a duž BC $\frac{-4+5}{2}=\frac{1}{2}$ i $\frac{5+8}{2}=\frac{13}{2}$.

Zatim, koristimo jednačinu prave kroz dvije tačke AB : $2ky+13=0$ i $BC: x-3y+19=0$. Odatle dobijamo koeficijente simetrala duži AB i BC, a to su $-\frac{1}{2}$ i -3, respektivno.

Koristeći obrazac za jednačinu prave kroz jednu tačku dobijamo jednačine simetrala : $S_{AB} x+2y-11=0$ i

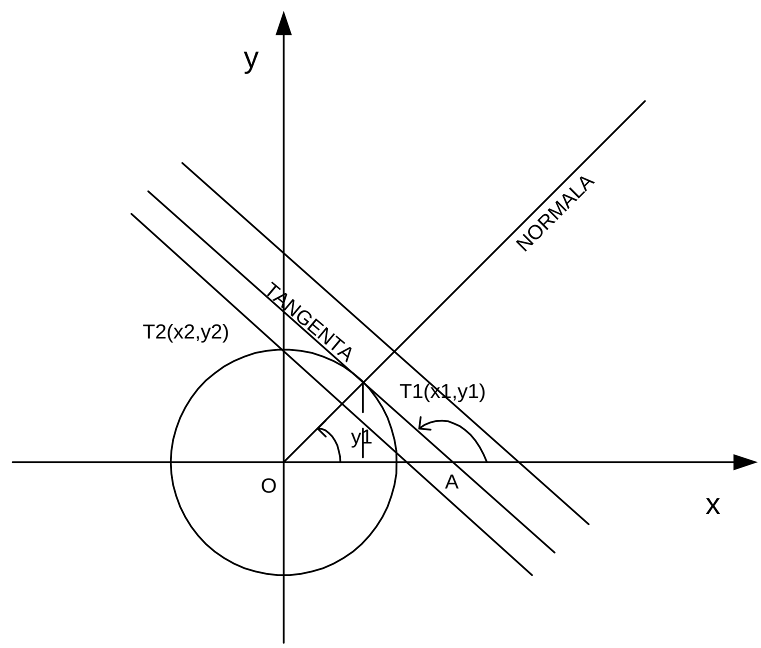
$$S_{BC}: 3x+y-8=0.$$

Rješavanjem ovog sistema nalazimo koordinate centra kružne linije $(p,q)=(1,5)$. Poluprečnik r se nalazi kao rastojanje centra $C_1(1,r)$ od tačke npr. $A(-2,S)$: $\sqrt{(-2-1)^2+(S-5)^2}=9$. I kažemo, jednačina tražene kružne linije glasi : $(x-1)^2+(y-5)^2=25$.

2. PRAVA I KRUŽNA LINIJA

2.1 POLOŽAJ PRAVE I KRUŽNE LINIJE

Za uzajamni položaj prave i kružne linije u ravni postoje tri mogućnosti:



Slika 9.

- Prava i kružna linija imaju dvije zajedničke tačke:
  ovaj slučaj nastupa kad je rastojanje od centra kružne linije do prave manje od njenog poluprečnika.

- Prava i kružna linija imaju jednu zajedničku tačku:
  ovaj slučaj nastupa kada je rastojanje od centra kružne linije do prave jednako njenom poluprečniku. U tom slučaju kažemo da je prava tangenta kružne linije.
- Prava i kružna linija nemaju zajedničkih tačaka:

ovaj slučaj nastupa kada je rastojanje od centra kružne linije do prave veće od njenog poluprečnika.

Da bismo ispitali odnos prave i kružne linije rješavamo sistem od jedne linearne i jedne kvadratne jednačine.

Neka je data jednačina prave

$$y = kx + n \qquad (1)$$

i neka je data jednačina kružne linije

$$(x-p)^2 + (y-q)^2 = r^2 \qquad (2)$$

Ako y iz prve zamjenimo u drugoj, dobijamo:

$$(x-p)^2 + (kx+n-q)^2 = r^2$$

odnosno

$$(1+k^2)x^2 + 2(kn-kq-p)x + (p^2+q^2+n^2-r^2-2nq) = 0 \qquad (3)$$

Diskriminanta kvadratne jednačine (3) je:

$$D = 4(kn-kq-p)^2 - 4(1+k^2)(p^2+q^2+n^2-r^2-2nq)$$

Poslije sređivanja dobijemo izraz:

$$D = 4(r^2(1+k^2) - (kp-q+n^2))$$

Možemo zaključiti slijedeće:

a) Ako je $r^2(1+k^2) - (kp-q+n) > 0$ jednačina (3) ima dva različita realna rješenja, u tom slučaju prava (1) siječe kružnu liniju (2) u dvjema različitim tačkama,

b) Ako je $r^2(1+k^2) - (kp-q+n)^2 = 0$ jednačina (3) ima samo jedno realno rješenje, dakle, prava (1) je tangenta kružne linije (2).Na osnovu toga se jednakost:

$$r^2(1+k^2) = (kp-q+n)^2$$

naziva uslov dodira prave i kružne linije

v) Ako je $r^2(1+k^2)-(np-k+n)<0$ jednačina (3) nema realnih rješenja, što znači da prava (1) i kružna linija (2) nemaju zajedničkih tačaka.

Na isti način rješavamo sistem

$$y = nx + n \qquad (4)$$

$$x^2 + y^2 = r^2 \qquad (5)$$

i dolazimo do jednačine tj. uslova koji mora zadovoljiti prava (4), da bi bila tangenta kružne linije (5):

$$r^2(1+k^2) = n^2 \qquad (6)$$

PRIMJER 1

Neka se na kružnicu $x^2 + y^2 = 6$ povuku tangente koje su paralelne s pravom $x - 2y - 6 = 0$ i odrede koordinate tačke dodira tih tangenata.

Jednačina tangente:

$y = kx + n$

$k = ?, n = ?$

Iz $x - 2y - 6 = 0$ slijedi $y = \frac{1}{2}x - 3$, odatle,

koeficijenti pravca prave $k = \frac{1}{2}$ => koeficijent pravca tangente

Uvrštavanjem $k = \frac{1}{2}$ i $r^2 = 6$ u uslovnu jednačinu (6) $n^2 = r^2(1+k^2)$ daje :

$n^2 = 6\left(1 + \frac{1}{4}\right) = \frac{30}{4}$, $\quad n = \pm\frac{\sqrt{30}}{2}$ dobijamo

$x - 2y + \sqrt{30} = 0$ i $x - 2y - \sqrt{30} = 0$ tražene jednačine tangenata.

Koordinate tačke dodira dobijamo zamjenom

$y = \frac{x}{2} + \frac{\sqrt{30}}{2}$ i $x^2 + y^2 = 6$

$$x^2 + \frac{x^2}{4} + \frac{\sqrt{30}}{2}x + \frac{30}{4} = 6$$

$$5x^2 + 2\sqrt{30}x + 6 = 0$$

$$x1,2=\frac{-2\sqrt{30}\pm\sqrt{120-120}}{10}$$

$$x1=\frac{-\sqrt{30}}{5}$$

$$y1=\frac{x1}{2}+\frac{\sqrt{30}}{2}=\frac{4\sqrt{30}}{10}=\frac{2}{5}\sqrt{30}$$

$$y1=\frac{2}{5}\sqrt{30}$$

Koordinate tačke dodira prve tangente $T_1\left(\frac{-\sqrt{30}}{5},\frac{2}{5}\sqrt{30}\right)$.

Na isti način dobijamo koordinate tačke dodira druge tangente $T_2\left(\frac{\sqrt{30}}{5},\frac{2}{5}\sqrt{30}\right)$.

PRIMJER 2

Naći jednačinu prave koja sadrži tačku $A=(2,-6)$ i dodiruje kružnu liniju $x^2+y^2-6x-2y-15=0$

Jednačina prave glasi $y+6=k(x-2)$, odnosno $kx-y-6-2k=0$. Iz jednačine kružne linije $x^2+y^2-6v-2y-15$ dobijamo vrijednost p,q i r :

$-2p=-6\Rightarrow p=3 \qquad -2q=-2\Rightarrow q=1 \qquad p^2+q^2-r^2=-15$

$9+1-r^2=-15$

$r^2=25\Rightarrow r=5$

Da bismo odredili koeficijent pravca koristimo uslovnu jednačinu.

$r^2(1+k^2)=9kp-q+n)^2$. Zamjenom odgovarajućih vrijednosti imamo :

$25(1+k^2)=(3k-1-6-2k)^2\Rightarrow 25+25k^2=k^2-14k+49\Rightarrow 12k^2-7k+12=0$

$k_1=\frac{-4}{3}$ i $k_2=\frac{3}{4}$

Tražene tangente su : $4x+3y+10=0$ i $3x-4y-30=0$

2.2 JEDNAČINE TANGENTE I NORMALE U ZADANOJ TAČKI KRUŽNE LINIJE

1) Na kružnu liniju $(x-p)^2+(y-q)^2=r^2$ (7)

Neka je $y=kx+n$ (8)

tangenta na liniji (7) u tački dodira $T(x_1 y_1)$. Prava CT je $C(p,q)$

centar kružne linije (7) ima koeficijent pravca $K=\frac{y1-p}{x1-p}$

Međutim, prava CT je normalna na tangentu (8), pa je

$k=\frac{-1}{k}=\frac{-x1-p}{y1-p}$ (keficijent pravca tangente) (9)

S druge strane, tačka T pripada pravoj (8), pa je

$y1=kv_1+n$, odakle je $n=y_1-kv_1$, tj. koristeći jednakost (9),

$$n=y_1+\frac{x_1-p}{y_1-q}x_1 \quad (10)$$

Zamjenujući dobijene vrijednosti (9) i (10) u (8) dobija se jednačina tangente u tački dodira (x_1,y_1),

$y=\frac{-x_1-p}{y_1-q}x+y_1+\frac{x_1-p}{y_1-q}x_1$, tj.

$$(x_1-p)(x-x_1)+(y_1-q)(y-y_1)=0$$

Odavde slijedi :

$$(x_1-p)(x-p+p-x_1)+(y-q+q-y_1)(y-y_1)=0$$

$$(x-p)(x_1-p)+(y-q)(y_1-q)-(x_1-p)^2-(y_1-q)^2=0$$

$$(x-p)(x_1-p)+(y-q)(y_1-q)=r^2 \quad (11)$$

To je, dakle, jednačina tangente na kružnu liniju

$(x-p)^2+(y-q)^2=r^2$ u tački dodira $T(x_1,y_1)$

NJen koeficijent pravca je

$$K=-\frac{x_1-p}{y_1-q}$$

a koeficijent pravca normale u tački $T(x_1, y_1)$,

$K = \frac{y_1 - q}{x_1 - p}$ pa jednačina normale glasi :

$$y - y_1 = \frac{y_1 - q}{x_1 - p}(x - x_1)$$

PRIMJER 1.

U tačkama presjeka prave $3x + y - 5 = 0$ i kružne linije $x^2 + y^2 - 2x + 6y + 5 = 0$ konstruisane su dirke na kružnu liniju. Odrediti ugao između tangenata.

Ako se u jednačinu kružne linije uvrsti $y = 5 - 3x$, dobija se

$x^2 + 25 - 30x + 9x^2 - 2x + 30 - 18x + 5 = 0$, tj.

$x^2 - 5x + 6 = 0$,

odakle je $x_1 = 2$ ili $x_2 = 3$, pa su koordinate presječnih tačaka $A(2,-1)$ i $B(3,-4)$.

Da bismo odredili ugao između tangenata neophodni su nam njihovi koeficijenti, a dobićemo ih ako izračunamo izvod funkcije

$x^2 + y^2 - 2x + 6y + 5 = 0$ u tački A, odnosno B.

$2x + 2yy^` - 2 + 6y^` = 0$,

$x + yy^` - 1 + 3y^` = 0 \Rightarrow y^` = \frac{1 - x}{3 + x}$ tj.

$k_1 = -\frac{1}{2}$ i $k_2 = 2$

Iz $tg\varphi = |\frac{k_1 - k_2}{1 + k_{1k_2}}|$ slijedi $\varphi = 90^0$ tj. tražene tangente se sijeku pod pravim uglom.

Ovaj zadatak možemo riješiti tako što ćemo koordinate dodirnih tačaka uvrstiti u jednačinu (11) i dobiti jednačine tangenata u tački A,

$(x-1)(2-1)+(y+3)(-1+3)=35 \Rightarrow x+2y-30=0$, odnosno B,

$(x-1)(3-1)+(y-3)(-4+3)=35 \Rightarrow 2x-y-40=0$

S obzirom da su im koeficijenti recipročno suprotni zaključujemo da su okomite.

2) Na kružnu liniju $x^2+y^2=r^2$ (12)

Neka je $y=kx+n$ (13)

tangenta na kružnoj liniji (12) u tački dodira $T(x_1, y_1)$.

Po istom postupku kao i za tangentu kružne linije $(x-p)^1+(y-q)^2=r$ dobijamo koeficijent pravca tangente (13)

$$k=-\frac{x_1}{y_1} \qquad (14)$$

Kako tačka $T(x_1, y_1)$ pripada pravoj (13), biće $y_1=kx_1+n$, a iz toga slijedi $n=y_1-kx_1$, odnosno

$$n=y_1+\frac{x_1}{y_1}x_1 \qquad (15)$$

Uvrštavajući (14) i (15) u (13) dobijamo

$$y=\frac{-x_1}{y_1}x+y_1+\frac{x_1}{y_1}-x_1 \,/\, y_1$$

$$yy_1=-x_1x+y_1^2+x_1^2$$

odnosno, poslije sređivanja :

$$xx_1+yy_1=r^2$$

Ovaj izraz predstavlja traženu jednačinu tangente na kružnu liniju $x^2+y^2=r^2$ u zadanoj tački $T(x_1y_1)$.

Normala kružne linije jeste prava koja je okomita na tangentu, pa će njen koeficijent pravca biti $r=\frac{y_1}{x_1}$.

Kada se taj izraz uvrsti u jednačinu $y - y_1 = k(x - x_1)$ (

jednačina prave kroz jednu tačku dobija se:

$$y - y_1 = \frac{y_1}{x_1}(x - x_1)$$

tj. kada se oslobodimo zagrade

$yx_1 - xy_1 = 0$, $\quad y = \frac{y_1}{x_1}x$

I to je jednačina normale na kružnu liniju $x^2 + y^2 = r^2$ u tački dodira $T(x_1 y_1)$.

Iz jednačine normale vidimo da je to prava koja prolazi ishodištem koordinatnog sistema, a to smo i očekivali za kružnu liniju kojoj je centar u ishodištu, jer se normala kružne linije podudara sa poluprečnikom povučenijim u tački dodira.

PRIMJER 2.

Koji ugao obrazuje tangente kružne linije $x^2 + y^2 = 25$ povučene u tačkama $(-4,3)$ i $(3,4)$.

Vrijednost ugla koji obrazuju tangente dobivamo iz

$$tg\varphi = \left|\frac{k_1 - k_2}{1 + k_1 k_2}\right|$$

Dakle, da bismo mogli izračunati ugao potrebni su nam koeficijenti pravca tangenata u zadanim tačkama kružne linije $x^2 + y^2 = 25$.

Koristeći jednačinu $xx_1 + yy_1 = r^2$ dobijamo jednačine tangenata $-4x + 3y = 25$ i $3x + 4y = 25$, a odatle slijedi

$$x_1 = \frac{4}{3}, k_2 = \frac{-3}{4}.$$

Kako su koeficijenti recipročno suprotni zaključujemo da su tangente okomite jedna na drugu, odnosno zahvataju ugao od 90^0.

Do rješenja možemo doći iako odredimo izvod funkcije

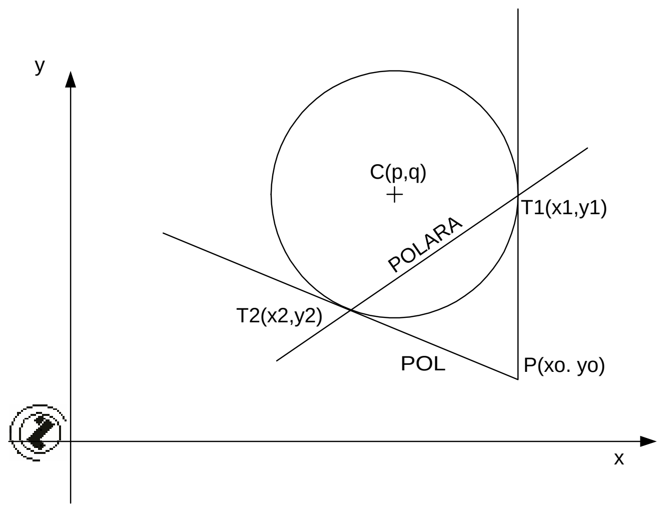
$x^2 + y^2 = 25$. U tački sa koordinatama $(-4,3)$, odnosno $(3,4)$. Pa ćemo imati :

$$2x + 2yy^{`} = 0 \Rightarrow 2yy^{`} = -2x \Rightarrow y^{`} = \frac{-x}{y}$$ tj.

$k_1 = \frac{4}{3}$ i $k_2 = \frac{-3}{4}$, dakle, ugao između tangenata je 90^0.

2.3 JEDNAČINE TANGENATA POVUČENIH IZ TAČKE VAN KRUŽNE LINIJE

1) Na kružnu liniju $(x-p)^2+(y-q)^2=r^2$



Slika 10.

Kao što se može vidjeti na slici 10. , iz tačke van kružne linije mogu se konstruisati dvije tangente na nju. NJihove jednačine možemo odrediti na dva načina :

I NAČIN (Uslovna jednačina)

Pretpostavimo li da tražene jednačine tangenata imaju oblik $y=kx+n$, možemo u tu jednačinu uvrstiti koordinate x_0, y_0 tačke P, jer ta tačka leži na objema tangentama.

Kao drugu jednačinu uzimamo uslovnu jednačinu dodira prave i kružne linije.

Na taj način dobijamo sistem jednačina :

$$y_0=kx_0+n$$

$$r^2(1+k^2)=(kp-q+n)^2 \qquad (16)$$

iz kojeg možemo izračunati tražene veličine k i n.

Druga jednačina tog sistema je kvadratna, pa ćemo dobiti po dvije vrijednosti za koeficijent smjera k i za odsječak n, koje uvrstimo u jednačinu $y = kx + n$. Tako ćemo dobiti jednačine obiju tangenata :

$y = k_1 x + n$, i $y = k_2 x + n_2$.

Ako se iz sistema (16) dobije samo jedno rješenje, to znači da je druga tangenta paralelna y-osi i, s obzirom da prolazi kroz (x_0, y_0) njena jednačina je $x = x_0$.

II NAČIN (Pomoću polare)

Tangente konstruisane iz tačke $P(x_0, y_0)$ van kružne linije dodiruju se u dvjema tačkama T_1 i T_2 (slika 10.).

Da bismo riješili ovaj problem, možemo prvo napisati jednačine tangenti iz P na datu kružnu liniju, zatim odrediti koordinate njihovih dodirnih tačaka T_1 i T_2 i, najzad napisati jednačinu prave kroz T_1 i T_2.

A prava T_1T_2 čija je jednačina :

$(x - p)(x_0 - p) + (y - q)(y_0 - q) = r^2$ zove se polara tačke P s obzirom na kružnu liniju, a tačka P je pol za pravu T_1T_2 (slika 10.). Prema tome jednačine tangenata na kružnu liniju $(x - p)^2 + (y - q)^2 = r^2$ iz tačke P se dobiju tako da se napiše jednačina polare, pa se odrede tačke presjeka polare sa kružnom linijom, tj. : koordinate tačaka dodira obiju tangenata koje se uvrste u jednačinu

$(x - p)(x_1 - p) + (y - q)(y_1 - q) = r^2$.

Primjer 1. Iz tačke $P(2,-3)$ konstruisane su tangente kružne linije

$(x - 1)^2 + (y + 5)^2 = 4$

Naći jednačinu tetive koja sadrži dodirne tačke.

Zadatak se može riješiti na dva načina :

Prvi način: Znajući jednačinu polare $(x-p)(x_0-p)+(y-q)(y_0-q)=r^2$

gdje su x_0 i y_0 koordinate tačke van kružne linije, možemo lako doći do rješenja.

Iz jednačine $(x-1)^2+(y+5)^2=4$ dobijamo vrijednosti $p=1, q=5, r=2$

Uvrstimo ih u obrazac za jednačinu polare i imamo :

$(x-1)(2-1)+(y+5)(-3+5)=4 \Rightarrow x-1+2y+10=4$ tj.

$x+2y-5=0$.

Drugi način : Možemo najprije da odredimo jednačine tangenata iz tačke $P(2,-3)$ na zadanu kružnu liniju, zatim presjecne tačke, odnosno tačke dodira. Na kraju da bismo dobili konačnu jednačinu polare, koordinate dodirnih tačaka uvrstimo u jednačinu prave kroz dvije tačke

$$y-y_1=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}(x-x_1)$$

Iz sistema $-3=2k+n$

$4(1+k^2)=(k+5-3-2k)^2$

dobijemo $k_1=0$ i $k_2=\frac{-4}{3}$, pa jednačine tangenata iz tačke P glase : $y=-3$ i $y=\frac{-4}{3}x-\frac{1}{3}$

Zamjenom ovih vrijednosti u jednačini kružne linije $(x-1)^2+(y+5)^2=4$ i dobijamo koordinate dodirnih tačaka i to : $A(1,-3)$ i $B(\frac{13}{5},\frac{-57}{15})$ pa će jednačina polare biti :

$$y+3=\frac{\frac{-57}{15}+3}{\frac{13}{5}-1}(x-1)$$ odnosno, $x+2y+5=0$

Primjer 2. Pod kojim uglom se vidi kružna linija $x^2+y^2-6y=0$ iz tačke $P(-6{,}3)$ Opšta jednačina tangenata konstruisanih iz tačke $P(-6{,}3)$ na kružnu liniju $x^2+y^2-6y=0$ glasi :

$y-3=k(x+6)$, odnosno

$kx-y+6n+3=0$

Zamjenom odgovarajućih vrijednosti u jednačinu uslova dodira : $r^2(1+k^2)=(kp-q+n)^2$

$9(1+k^2)=(-3+6k+3)^2 \Rightarrow 9k^2=27 \Rightarrow k=\pm\sqrt{3}$

dobijamo vrijednosti koeficijenata pravca tangenata i to $k_1=\sqrt{3}$ i $k_2=-\sqrt{3}$.

Iz $tg\varphi=|\frac{2\sqrt{3}}{1-3}|=\sqrt{3}$, zaključujemo da se kružna linija $x^2+y^2-6y=0$ vidi iz tačke $P(-6{,}3)$ pod uglom od 60^0.

Primjer 3. Iz tačke $A(-5{,}7)$ van kružne linije konstruisane su tangente na kružnu liniju $x^2+y^2+8x-5=0$.

Odrediti površinu trougla čija su tjemena data tačka i dodirne tačke pomenutih tangenata.

Da bismo odredili površinu trougla moramo naći koordinate tjemena B i C.

Prvo ćemo odrediti jednačine tangenata iz tačke $A(-5{,}7)$ na kružnu liniju $x^2+y^2+8x-5=0$.

Kako one prolaze kroz tačku A njihove jednačine imaju oblik $y-7=k(x+5)$, odnosno $kx-y+5k+7=0$.

Iz $25(1+k^2)=(-4k+5k+7)^2$

$25+25k^2=k^2+144+45$

$244^2-144-24=0 \Rightarrow 12k^2-7k-12=0 \Rightarrow k_{1,2}=\frac{77\sqrt{49+576}}{24}$

dobijamo koeficijente tangenata $k_1 = \frac{4}{3}, k_2 = \frac{-3}{4}$, pa njihove jednačine glase : $y - 7 = \frac{4}{3}(x+5)$ i $y - 7 = \frac{-3}{4}(x+5)$

Rješavanjem sistema :

$x^2 + y^2 + 8x - 9 = 0$ $\qquad$ $x^2 + y^2 + 8x - 9 = 0$

$y - 7 = \frac{4}{3}(x+5)$ $\qquad$ $y - 7 = \frac{-3}{4}(x+5)$

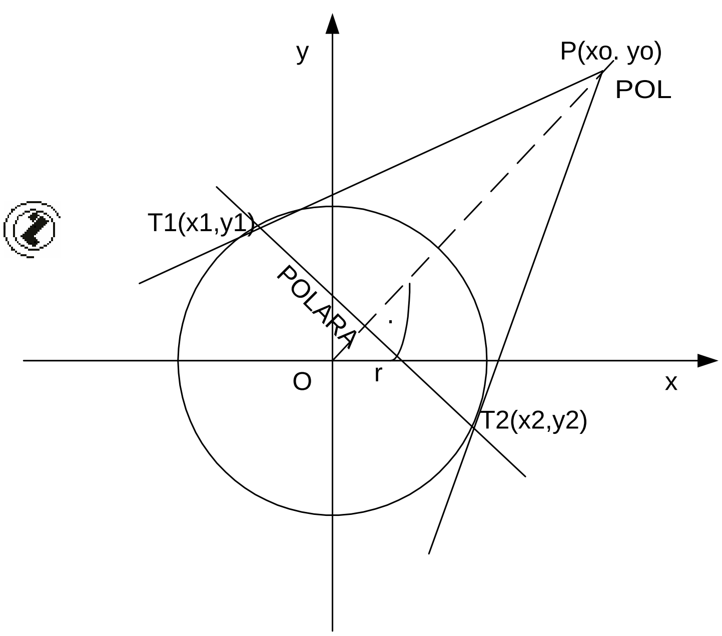
dolazimo do koordinata dodirnih tačaka :

$B(-1,4)$ i $C(-8,3)$ tako da će površina trogla biti

$P\frac{1}{2}[-5(4-3) - 1(3-7) - 8(7-4)] = \frac{1}{2}25 = 12,5$

2) Na kružnu liniju $x^2 + y \ \ = r$

Na isti način se dolazi do jednačine tangenata povučenih na kružnicu $x^2 + y^2$ iz zadane tačke $p(x_0 y_0)$ koja leži izvan kružne linije



Slika 11.

I NAČIN

Iz sistema koji čine jednačina tangente $y = kx + n$, u koju se uvrste koordinate x_0, y tačke P, i uslovna jednačina :

$y_0 = x_0 k + n$

$n^2 = r^2(1 + k^2)$

Računaju se koeficijenti pravca k_1, k_2 i odsječci na osi y, n_1, n_2 traženih tangenata.

II NAČIN

Napiše se jednačina polare, do koje se može doći i jednostavnijim putem nego što smo to opisali kod kružne linije $(x - p)^2 + (y - q)^2 = r^2$.

Neka je $T_1(x_1, y_1), T_2(x_2, y_2)$. Tada jednačine tangenti koji dodiruju datu kružnu liniju redom u tačkama T_1 i T_2, glase :

$xx_1 + yy_1 = r^2$ i $xx_2 + yy_2 = r^2$.

Kako obe ove tangente sadrže tačku $P(x\ , y_0)$, biće :

$x_o x_1 + y_0 y_1 = r^2$ i $x_0 x_2 + y_0 y_2 = r^2$

Na osnovu toga možemo zaključiti da jednačina prave TT_1, (polare, slika 11.) glasi : $xx_0 + yy_0 = r^2$.

Kada znamo jednačinu polare, odredimo tačke presjeka polare sa kružnom linijom, čije su koordinate uvrste u jednačinu tangente.

$xx_1 + yy_1 = r^2$

Primjer 1. Naći jednačine tangenata kruga $x^2 + y^2 = 32$, konstruisanih iz tačke $M(8{,}8)$. Kako tangenta prolazi kroz tačku $M(8{,}8)$ njena jednačina je :

$y-8=k(x-8)$, odnosno $y=kx+8-8k$

Dobijena prava je tangenta kružne linije $x^2+y^2=r^2$ ako je $r^2(1+k^2)=n^2$ tj. $32(1+k^2)=(8-8k)^2$, odakle je $k^2-4k+1=0$.

Tako da su koeficijenti pravca tangenata $k_1=2+\sqrt{3}$ odnosno $k_2=2-\sqrt{3}$.

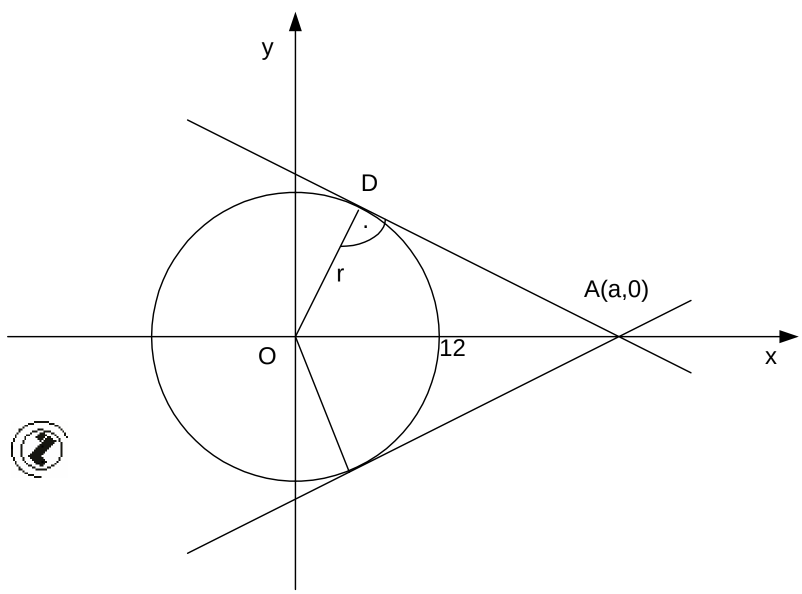
Prema tome, jednačine tangenata glase :

$y-8=(2+\sqrt{3})(x-8)$ i $y-8=(2-\sqrt{3})(x-8)$

Primjer 2. Konstruisana je kružna linija poluprečnika $r=12$ sa centrom u koordinatnom početku. Odrediti tačku $A(a_1,0)$

$(a>o)$ i jednačine tangenti konstruisanih iz A na kružnu liniju tako da je dužina odgovarajućih tangentnih duži $l=35$.

Jednačina kružne linije je $x^2+y^2=144$



Slika 12.

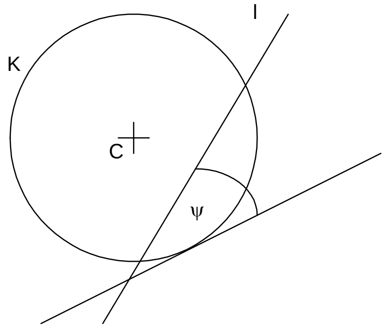
Iz pravougaonog trougla OAD imamo : $OA^2=r^2+l^2=12^2+35^2=1369$, pa je $a=37$. Jednačine tangenti iz tačke $A(37,0)$ na datu pružnu liniju su oblika $y=kx+l$, gdje kl nalazimo iz uslova

$O=37k+l$ i $l^2=144(1+k^2)$

Dobija se $k_{1,2} = \pm\frac{12}{35}$ i $l_{1,2} = \mp\frac{444}{35}$ pa su jednačine tangenti

$12x + 35y - 444 = 0$ i $12x - 35y - 444 = 0$

2.4. UGAO IZMEĐU PRAVE I KRUŽNE LINIJE



Slika 13.

Ako prava l siječe kružnu liniju K , ugao između te prave i kružne linije definiše se kao ugao između prave l i tangente na kružnu liniju K, konstruisane u jednoj od tačaka presjeka prave l i kružne linije K.

Primjer 1. Odrediti ugao pod kojim data prava $x-3y-5=0$ siječe datu kružnu liniju $x^{2+} + y \quad -2x+6y+5=0$.
Da bismo odredili pod kojim uglom se sijeku prava $x-3y-5=0$ i kružna linija $x^{2+} + y \quad -2x+6y+5=0$ nađimo prvo njihove tačke presjeka tj. riješimo slijedeći sistem jednačina :
$x = 5+3y \qquad \wedge \qquad x^2 + y^2 - 2x + 6y + 9 = 0$
Standardnim postupkom dolazimo do rješenja ovog sistema.
To su : $(-1,2)$ i $(2,-1)$ pa se u tim tačkama sijeku data prava data kružna linija.
Jednačina tangente u tački $(-1,-2)$ glasi :
$-2(x-1)-5(x+3)=1$, tj. $2x+5y+14=0$ i njen koeficijent pravca je $\frac{-1}{2}$. S druge strane, koeficijent pravca date prave je $\frac{1}{3}$ pa za ugao y između date prave i date kružne linije nalazimo :

$$tg\varphi = \left|\frac{\frac{-1}{3}+\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{3}\frac{1}{2}}\right| = 1 \text{ tj. } y = 45^0 .$$

Primjer 2. Pod kojim uglom prava $x-2y=0$ siječe kružnu liniju

$x^2 + y^2 = 5$

Kao što znamo traženi ugao je u stvari, ugao između date prave tangente konstruisan u istom presjeku prave $x-2y=0$ i kružne linije $x^2+y^2=5$.

Rješenjem sistema

$x-2y=0$

$x^2+y^2=5$

Dobijamo koordinate presječene tačke : $A(2,1)$ i $A_2(-2,-1)$.

Keficijent pravca tangente možemo dobiti na slijedeći način :

$y^`(A_1)=k \Rightarrow 2x+2yy^1=0$

$2yy^`=-2x$

$y^`=\frac{-x}{y}$ tj. $k_{,2}=-2$

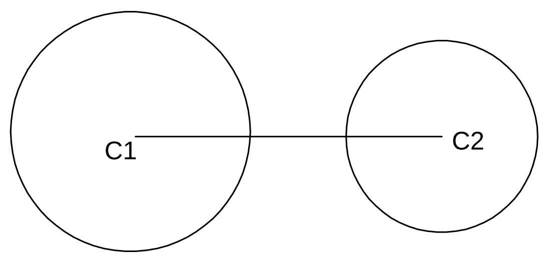
Iz $tg\varphi=\left|\frac{\frac{1}{2}+2}{1-\frac{1}{2}2}\right|$ slijedi da prava $x-2y=0$ siječe kružnu liniju $x^2+y^2=5$ pod pravim uglom.

3. DVIJE KRUŽNE LINIJE

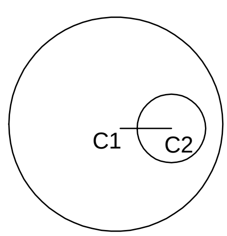
3.1. UZAJAMNI POLOŽAJ DVIJE KRUŽNE LINIJE

Neka su k_1 i k_2 kružne linije sa centrima C_1 i C_2 i polupręčnicima r_1 i r_2 resrektivno. Za uzajaman položaj tih linija postoje slijedeće mogućnosti :

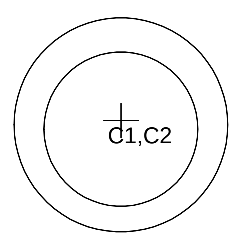
1) Kružne linije k_1 i k_2 nemaju zajedničkih tačaka. Ovo nastupa u slučaju kada je jedna kružna linija izvan druge, tj. $|C_1C_2| > r_1 + r_2$ (slika 13.) ili kada je jedna kružna linija unutar druge, tj. $|C_1C_2| < r_1 - r_2$ (slika 14.)



Slika 13.



Slika 14.



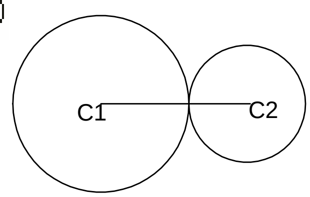
Slika 15.

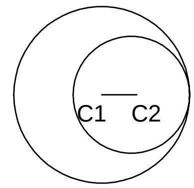
Ako dvije kružne linije imaju isti centar, odnosno ako je $C_1C_2 = 0$, (skika 15.) kažemo da su **koncentrične.**

2) Kružne linije imaju samo jednu zajedničku tačku. Ovo nastupa ako se kružne linije dodiruju spolja, tj.

$|C_1C_2| = r_1 + r_2$ (slika 16.) ili ako se dodiruju iznutra, tj.

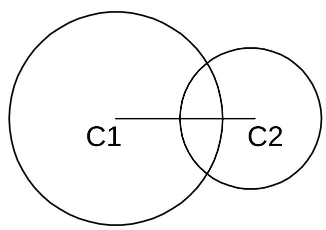
$|C_1C_2| = |r_1 - r_2|$ (slika 17).





Slika 16.　　　　　　　　Slika 17.

3. Kružne linije k_1k_2 imaju dvije zajedničke tačke. Ovo nastupa u slučaju kada je rastojanje između centara C_1 i C_2 manje od zbira poluprečnika, a veće od njihove razlike, tj. $|r_2 - r_1| < |C_1C_2| < r_1 + r_2$ (slika 18.)



Slika 18.

Primjer 1. Data je kružna linija $x^2 + y^2 - 4x - 5 = 0$ i tačka $A(5,4)$.

Naći jednačinu kružne linije čiji je centar tačka A i koji dodiruje spolja dati krug.

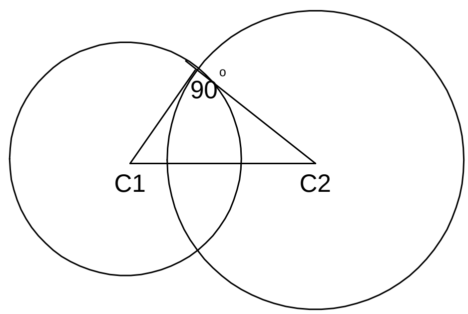
Dati krug se može predstaviti u obliku $(x-2)^2 + y^2 = 9$, pa je njegov centar $C(2,0)$, a poluprečnik $r_1 = 3$.

Dva kruga se dodiruju spolja ako i samo ako je zbir njihovih poluprečnika jednak odstojanju centara.

Iz $d(AC)=\sqrt{(5-2)^2+(4-0)^2}=\sqrt{25}$ slijedi da je rastojanje između centara datih kružnih linija $AC=5$, pa je poluprečnik tražene kružne linije $r=2$.

Zamjenom odgovarajućih vrijednosti u jednačinu kružne linije imamo : $(x-5)^2+(x-4)^2=4$

3.2. UGAO PRESJEKA DVIJE KRUŽNE LINIJE



Slika 19.

Ako se dvije kružne linije sijeku, ugao između njih se deformiše kao ugao između njihovih tangenti u jednoj od tačaka presjeka. Ako se dvije kružne linije sijeku pod pravim uglom kaže se da su one ortogonalne. Važno svojstvo ortogonalnih kružnih linija je da tangente svake od njih u presječnim tačkama prolaze kroz centar druge (slika 19.).

Stoga i na osnovu Pitagorine teoreme za ortogonalne kružne linije važi : $|C_1C_2|^2=r_1^{\ 2}+r_2^{\ 2}$ gdje su sa C_1 i C_2, odnosno r_1 i r_2 označeni njihovi centri, odnosno poluprečnici.

Primjer 1. Pod kojim uglom se sijeku date kružne linije $x^2+y^2=16$ i $(x-5)^2+y^2=9$?

Ugao presjeka ove dvije kružne linije je, ustvari, ugao koji grade njihove tangente povučene u jednoj od presječenih tačaka kružnih linija.

Rješavanjem sistema

$x^2 + y^2 = 16$

$(x-5)^2 + y^2 = 9$ dobijamo koordinate tačke presjeka i to :

$T_1(\frac{16}{5},\frac{12}{5})$ i $T_2(\frac{16}{5},-\frac{12}{5})$

Da bismo odredili ugao pod kojim se sijeku date kružne linije koristićemo obrazac $tg\varphi = |\frac{k_1 - k_2}{1 + k_{1k_2}}|$, a koeficijente pravca tangenti u presječnoj tački naprimjer T_1 možemo odrediti pomoću izvoda :

$$k_1 = y^{`}(T_1) \Rightarrow 2x + 2yy^{`} = 0 \qquad \wedge \qquad 2x - 10 + 2yy^1 = 0$$

$$2yy^{`} = -2x \qquad\qquad 2yy^{`} = 1 = -2x$$

$$y^{`} = \frac{-x}{y} = \frac{\frac{-16}{5}}{\frac{12}{5}} \Rightarrow y^{`} = \frac{5-x}{y} = \frac{5-\frac{16}{5}}{\frac{17}{5}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow k_1 = \frac{-4}{3} \qquad\qquad \Rightarrow k_2 = \frac{3}{4}$$

Kako je $k_1 = -\frac{1}{k_2}$ zaključujemo da se date kružne linije sjeku pod pravim uglom.

Primjer 2. Odrediti jednačinu kružne linije koja sadrži tačku $A(-2,-6)$, sječe ortogonalno kružnu liniju $x^2 + y^2 - 6x - 8y = 0$ a središte joj pripada pravoj $3x - 2y - 12 = 0$.

Kako tražena kružna linija sadrži tačku $A(-2,-6)$ njena jednačina se može napisati u obliku

$(-2-p)^2 + (-6-q)^2 = r^2$.

Iz uslova ortogonalnosti $(CC_1)^2 = r^2 + r_1^2$ slijedi

$(p-3)^2+(q-4)^2=25+r^2$

Rješavanjem sistema $(-2-p)^2+(-6-q)^2=r^2$

$(p-3)^2+(q-4)^2=25+r^2$

dobijamo jednačinu $p+2q+4=0$, a pošto znamo da centar tražene kružne linije pripada pravoj $3x-2y-12=0$ ona se može mapisati kao $3p-2q-12=0$.

Iz sistema

$p+2q+4=0$

$3p-2q-12=0$ dobijemo da je $p=2, q=-3$.

Zamjenom ovih vrijednosti u pokaznu jednačinu dobijamo

$r=5$. Dakle, jednačina tražene kružne linije glasi :

$(x-2)^2+(y+3)^2=25$

3.3. ZAJEDNIČKE TANGENTE DVIJE KRUŽNE LINIJE

Ako su date jednačine kružnih linija :

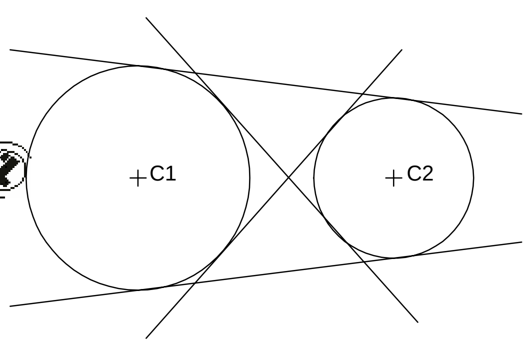
$(x-p)^2+(y-q)^2=r^2 \quad \wedge \quad (x-p)^2+(y-q)^2=R^2$ (17)

i ako predpostavimo da je prava $y=kx+n$ (18)

njihova zajednička tangenta, tada vrijednosti k i n određujemo iz uslova dodira prave (18) sa svakom od linija (17).

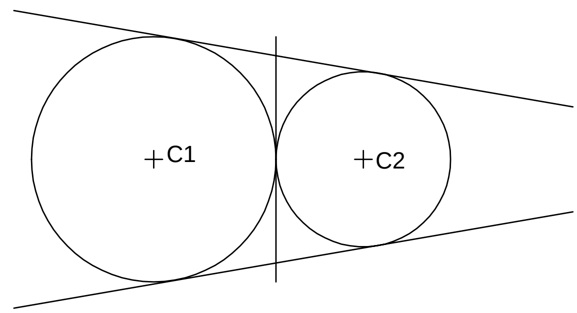
Ovaj problem može imati 4 rješenja, a ne mora imati ni jedno.

1) Ako su kružne linije jedna van druge tada postoje četiri zajedničke tangente (slika 20.)



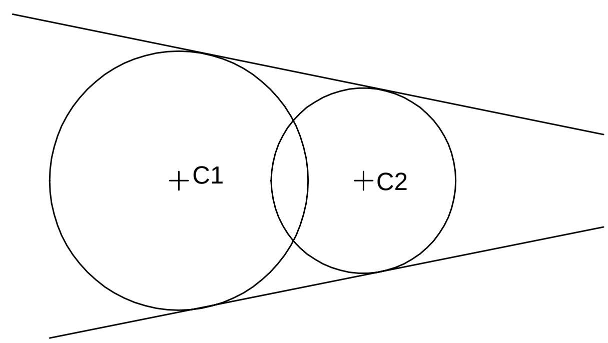
Slika 20.

2) Ako se dodiruju spolja , postoje tri zajedničke tangente (slika 21.)



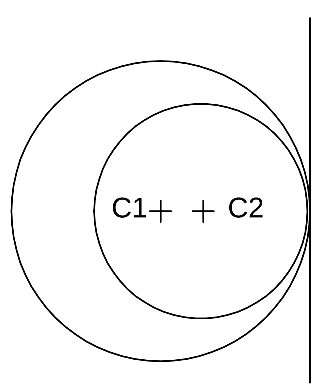
Slika 21.

3) Ako se sjeku u dvije tačke imaju dvije zajedničke tangente (slika 22.)



Slika 22.

4) Ako se dodiruju iznutra imaju jednu zajedničku tangentu (slika 23.)



Slika 23.

5) Ako je jedna kružna linija unutar druge, ne postoje zajedničke tangente

PRIMJER 1.

Odrediti zajedničke tangente kružnih linija :

$(x+5)^2+y^2=0$ i $(x-5)^2+y^2=40$

Da bi smo našli zajedničke tangente kružnih linija treba da riješimo sistem jednačina:

$10(1+k^2)=(-5k+n)^2 \quad \wedge \quad 40(1+k^2)=(5k+n)^2$

Ako podijelimo ove jednačine dobijamo:

$\left(\frac{5k+n}{-5k+n}\right)^2=4$ tj. $\frac{5k+n}{-5k+n}=\pm 2$

pa dolazimo do slijedećih mogućnosti:

$k=\frac{1}{15}n$ i $k=\frac{3}{5}n$.

Rješavanjem sistema $15k=n \quad \wedge \quad 10(1+k^2)=(-5k+n)^2$ i $5k=3n \quad \wedge \quad 10(1+k^2)=(-5k+n)^2$ dobijamo četiri rješenja po (k,n)

to su: $(3{,}5),(-3{,}-5),\left(\frac{1}{3},5\right),\left(-\frac{1}{3}-5\right)$. Prema tome date kružne linije imaju četiri zajedničke tangente:

$y=3x+5,\ y=-3x-5{,}3y=x+15{,}3y=-x-15$